Lösungshinweis:

PLENARÜBUNG

Aufgabe 18

(a) 2. NEWTONsches Gesetz für ein freigeschnittenes Stabstückchen der infinitisemalen Länge dx:

$$\mu\, dx\, \ddot{u}(x,t) = N(x+dx,t) - N(x,t). \tag{1}$$

Wegen

$$N'(x,t) = \frac{N(x+dx,t) - N(x,t)}{dx} \tag{2}$$

ist das gleichbedeutend mit

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{1}{\mu} N'(x,t). \tag{3}$$

Materialgesetz:

$$N = \sigma A = EA(\varepsilon + \tau\dot{\varepsilon}) \tag{4}$$

Kinematik:

$$\varepsilon = u' \tag{5}$$

Aus (4) und (5):

$$N' = EA(u'' + \tau\dot{u}'') \tag{6}$$

eingesetzt in (3) ergibt die partielle Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\ddot{u} - \frac{EA}{\mu}(u'' + \tau\dot{u}'') = 0 \tag{7}$$

(b) Produktansatz von Bernoulli:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{8}$$

wobei $X(x)$ die sogenannte Ortsfunktion und $T(t)$ die Zeitfunktion ist. Ableiten, Einsetzen sowie Separation von orts- und zeitabhängigen Anteilen ergibt:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t) + \tau\dot{T}(t)} = c_L^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = const. = -\omega_L^2$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine reine Zeitfunktion, die rechte Seite eine reine Ortsfunktion. Linke und rechte Seite der Gleichung können zu allen Zeiten und an allen Orten nur gleich sein, wenn sie gleich einer Konstanten $-\omega_L^2$ sind. So ergeben sich zwei gewöhnliche Dgln.:

$$\ddot{T}(t) + \tau\omega_L^2 \dot{T}(t) + \omega_L^2 T(t) = 0 \tag{9}$$

$$X''(x) + \left(\frac{\omega_L}{c_L}\right)^2 X(x) = 0 \tag{10}$$

(c) Randbedingungen: Das linke Ende sei $x = 0$ und rechts $x = l$. Für die Randbedingung bei $x = l$ beachte die Gleichungen (4) und (5).

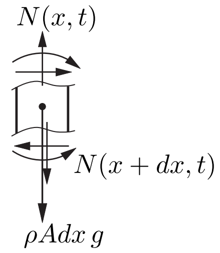
$$u(x{=}0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{u}(x{=}l,t) &= -N(x{=}l,t) \\ &= -EA\big[u'(x{=}l,t) + \tau\dot{u}'(x{=}l,t)\big] \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \ddot{u}(x{=}l,t) + \frac{EA}{m}\big[u'(x{=}l,t) + \tau\dot{u}'(x{=}l,t)\big] = 0 \tag{RB 2}$$

Aufgabe 40

(a) Freischnitt eines differentiell kleinen Elementes



2. NEWTONsches Gesetz: (senkrechte Komponente)

$$N(x+dx,t) - N(x,t) + \rho A dx\, g = \rho A dx\, \ddot{u}(x,t) \tag{11}$$

$$N'(x,t) + \rho A\, g = \rho A\, \ddot{u}(x,t) \tag{12}$$

$$\text{mit} \quad N(x,t) = EA\, u'(x,t)$$

$$\text{und} \quad EA = const.$$

$$\Rightarrow \quad EAu''(x,t) + \rho A\, g = \rho A\, \ddot{u}(x,t) \tag{13}$$

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{E}{\rho} u''(x,t) + g \tag{14}$$

(b) Transformation auf die Verschiebung $\tilde{u}$ gegenüber der statischen Ruhelage u_0:

$$u(x,t) = u_0(x) + \tilde{u}(x,t) \tag{15}$$

Aus Gl. (14) folgt mit $\dot{u}_0 = 0$:

$$u_0''(x) = -\frac{\rho g}{E} \tag{16}$$

und mit den Randbedingungen (in Ruhe keine Anregung, deshalb $F(t) = 0$):

$$u_0(0) = 0 \tag{17}$$

$$u_0'(l) = \frac{mg}{EA} \quad \text{bzw.} \quad u_0'(0) = \frac{(m + A\rho l)g}{EA} \tag{18}$$

$$\hookrightarrow \; u_0(x) = \frac{\rho g l^2}{E}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{\rho A l} + 1\right)\frac{x}{l}\right] \tag{19}$$

Gl. (15) mit (19) ergibt eingesetzt in Gl. (14) die bekannte Wellengleichung:

$$\ddot{\tilde{u}}(x,t) = c_l^2 \tilde{u}''(x,t) \tag{20}$$

$$\text{mit} \quad c_l^2 = \frac{E}{\rho} \tag{21}$$

Nun wird die partikuläre Lösung (=Auswirkung der äußeren Anregung) bestimmt.
Ansatz:

$$\tilde{u}_p(x,t) = X_p(x) \cdot \cos\Omega t \tag{22}$$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{u}}_p(x,t) = -\Omega^2 X_p(x) \cdot \cos\Omega t \tag{23}$$

$$\tilde{u}_p''(x,t) = X_p''(x) \cdot \cos\Omega t \tag{24}$$

$$\Rightarrow\ -\Omega^2 X_p(x) = c_l^2 X_p''(x) \tag{25}$$

$$\Rightarrow\ \underline{X_p''(x) + \left(\frac{\Omega}{c_l}\right)^2 X_p(x) = 0} \tag{26}$$

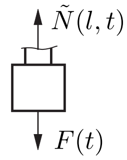
Mit einem Eulerschen Ansatz kann diese gewöhnliche Differentialgleichung gelöst werden:

$$X_p(x) = e^{\lambda x}\ \Rightarrow\ \lambda^2 = -\left(\frac{\Omega}{c_l}\right)^2\ \Rightarrow\ \underline{\lambda_{1/2} = \pm i\left(\frac{\Omega}{c_l}\right)} \tag{27}$$

$$\Rightarrow\ \underline{X_p(x) = A\cos\frac{\Omega}{c_l}x + B\sin\frac{\Omega}{c_l}x} \tag{28}$$

Die Anpassung an die Randbedingungen erfolgt unter Berücksichtigung der Transformation auf Schwingungen aus der statischen Ruhelage. Deshalb taucht die Gewichtskraft im Freischnitt nicht auf, jedoch eine modifizierte Normalkraft $\tilde{N}(l,t)$, die Transformationseigenschaften beinhaltet[1]:

$$\tilde{u}_p(0,t) = 0 \tag{RB 1}$$



$$\begin{aligned} m\ddot{\tilde{u}}_p(l,t) &= -\tilde{N}(l,t) + F(t) \\ &= -EA\tilde{u}_p'(l,t) + F_0\cos\Omega t \end{aligned} \tag{RB 2}$$

N.R.:

$$\tilde{u}_p'(x,t) = \left(-A\sin\frac{\Omega}{c_l}x + B\cos\frac{\Omega}{c_l}x\right)\frac{\Omega}{c_l}\cdot\cos\Omega t \tag{29}$$

$$\ddot{\tilde{u}}_p(x,t) = -\Omega^2\left(A\cos\frac{\Omega}{c_l}x + B\sin\frac{\Omega}{c_l}x\right)\cdot\cos\Omega t \tag{30}$$

aus (RB 1) folgt:

$$X_p(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{A = 0}} \tag{31}$$

aus (RB 2) folgt:

$$\left[-m\Omega^2 X_p(l) + EAX_p{}'(l)\right]\cos\Omega t = F_0\cos\Omega t \tag{32}$$

$$B\left[-m\Omega^2\sin\frac{\Omega}{c_l}l + EA\frac{\Omega}{c_l}\cos\frac{\Omega}{c_l}l\right]\cos\Omega t = F_0\cos\Omega t \tag{33}$$

$$\underline{\underline{B = \frac{F_0}{EA\frac{\Omega}{c_l}\cos\frac{\Omega}{c_l}l - m\Omega^2\sin\frac{\Omega}{c_l}l}}} \tag{34}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung:

$$\tilde{u}_p(x,t) = \frac{F_0}{EA\frac{\Omega}{c_l}\cos\frac{\Omega}{c_l}l - m\Omega^2\sin\frac{\Omega}{c_l}l}\cdot\sin\frac{\Omega}{c_l}x\cdot\cos\Omega t \tag{35}$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition dieser partikulären Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bei reellen Systemen existiert stets eine Dämpfung (auch wenn diese im vorliegenden Modell nicht abgebildet ist). Daher klingt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ab und nach genügend langer Zeit (=eingeschwungener Zustand) verbleibt allein die partikuläre Lösung. Somit beschreibt (35) das Verhalten das Systems im eingeschwungenen Zustand.

[1] Wer das nicht versteht, macht einen ganz normalen Freischnitt mit Gewichtskraft, gewinnt daraus eine Randbedingung für u, setzt die Transformationsbeziehung Gl. (15) ein und erhält Gl. (RB 2).