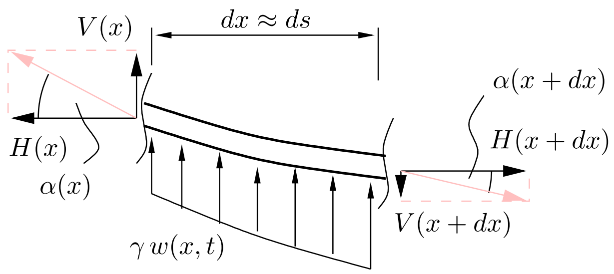
Lösungshinweis:

TUTORIUM

Aufgabe 10

(a) Freischnitt am differentiell kleinen Element:



2. Newtonsches Gesetz:

$$dm\,\ddot{u}(x,t) = H(x+dx,t) - H(x,t) \tag{1}$$

$\ddot{u} = 0$, da reine Transversalschwingung

$$\Rightarrow 0 = H'(x,t)\,dx \Rightarrow H(x,t) = H = \text{konst.} \tag{2}$$

$$dm\,\ddot{w}(x,t) = V(x+dx,t) - V(x,t) - \gamma w(x,t)\,dx \tag{3}$$

$$\text{mit} \quad dm = \mu dx \quad \text{folgt} \tag{4}$$

$$\mu\ddot{w}(x,t) = V'(x,t) - \gamma w(x,t) \tag{5}$$

Kinematik:

$$\frac{V(x,t)}{H} = \tan\alpha(x,t) = w'(x,t) \tag{6}$$

$$\Rightarrow V(x,t) = H\,w'(x,t) \tag{7}$$

$$H = S\cos\alpha(x,t) \approx S \quad (\text{für kleine } \alpha) \tag{8}$$

Aus Gl. (5) mit Gl. (7) und Gl. (8) ergibt sich die folgende partielle Differentialgleichung der Bewegung

$$\ddot{w}(x,t) - \frac{S}{\mu}w''(x,t) + \frac{\gamma}{\mu}w(x,t) = 0 \tag{9}$$

(b) Randbedingungen:

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt:

$$w(0,t) = 0 \tag{10}$$

$$w(l,t) = 0 \tag{11}$$

(c) Produktansatz nach Bernoulli:

$$w(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{12}$$

$$\Rightarrow \ddot{w} = X\ddot{T}\,, \quad w'' = X''\,T \tag{13}$$

eingesetzt in die Diff'gl. (9):

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{S}{\mu}\frac{X''}{X} - \frac{\gamma}{\mu} \tag{14}$$

Die linke Seite muß zeitlich konstant sein (und räumlich gemäß Ansatz sowieso), da die rechte Seite nicht von der Zeit abhängt. Wir wollen diese Konstante mit $-\omega^2$ bezeichnen:

$$\frac{\ddot{T}}{T} =: -\omega^2 \tag{15}$$

Damit erhalten wir die beiden gewöhnlichen Diff'gl.

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{16}$$

$$X'' + \frac{\mu\omega^2 - \gamma}{S}X = 0 \tag{17}$$

(d) Aus den Randbedingungen Gl. (10) und (11) werden mit dem Produktansatz Gl. (12) die folgenden Randbedingungen für die Ortsfunktion:

$$X(0) = 0 \tag{18}$$

$$X(l) = 0 \tag{19}$$

Aufgabe 38

(a) Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \tag{20}$$

beschreibt die Längsschwingungen des untersuchten Stabes.

(b) Die Randbedingungen erhält man durch geeignete Schnitte am linken und rechten Rand:

$$0 = N\left(-\frac{l}{2},t\right) - ku\left(-\frac{l}{2},t\right) - F(t) \tag{21a}$$

$$0 = -N\left(\frac{l}{2},t\right) - ku\left(\frac{l}{2},t\right) + F(t) \tag{21b}$$

Für die Normalkraft $N(x,t)$ gilt der Zusammenhang

$$N(x,t) = EA\frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

der aus dem Werkstoffgesetz und der Kinematik hergeleitet werden kann.

(c) Zur Berechnung der Längsschwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung der DGL. Ansatz:

$$u_p(x,t) = X(x)\cos\Omega t \quad .$$

Die Systemantwort gehorcht also dem gleichen Zeitgesetz, wie die Anregung (Gleichtaktansatz).

Dieser Produktansatz überführt die partielle Differentialgleichung (20) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{\Omega}{c} \quad . \tag{22}$$

Die Lösung von (22) lautet bekanntlich

$$X = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x \quad . \tag{23}$$

Die Randbedingungen (21) kann man nun für die Ortsfunktion formulieren

$$0 = EAX'\left(-\frac{l}{2}\right) - kX\left(-\frac{l}{2}\right) - F_0 \tag{24a}$$

$$0 = -EAX'\left(\frac{l}{2}\right) - kX\left(\frac{l}{2}\right) + F_0 \tag{24b}$$

Einsetzen von (23) in die Randbedingungen (24) ergibt mit der Abkürzung $\xi = \frac{\lambda l}{2}$ unter Ausnutzung von $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} F_0 &= EA\lambda\left(\alpha \sin \xi + \beta \cos \xi\right) - k\left(\alpha \cos \xi - \beta \sin \xi\right) \\ F_0 &= EA\lambda\left(-\alpha \sin \xi + \beta \cos \xi\right) + k\left(\alpha \cos \xi + \beta \sin \xi\right) \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten α und β. Durch Addieren bzw. Subtrahieren der Gleichungen erhält man unmittelbar die Forderungen, die an α und β für alle Zeiten gestellt werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \quad , \\ \beta &= \frac{F_0}{EA\lambda \cos \frac{\lambda l}{2} + k \sin \frac{\lambda l}{2}} \quad . \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich nun durch Einsetzen der berechneten Konstanten α und β

$$u_p\left(x,t\right) = \frac{F_0 \sin \lambda x}{EA\lambda \cos \frac{\lambda l}{2} + k \sin \frac{\lambda l}{2}} \cos \Omega t \quad , \tag{26}$$

mit

$$\lambda = \frac{\Omega}{c} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad .$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition dieser partikulären Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bei reellen Systemen existiert stets eine Dämpfung (auch wenn diese im vorliegenden Modell nicht abgebildet ist). Daher klingt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ab und nach genügend langer Zeit (=eingeschwungener Zustand) verbleibt allein die partikuläre Lösung. Somit beschreibt (26) das Verhalten das Systems im eingeschwungenen Zustand. Der Verlauf der Verschiebung ist sinusförmig und oszilliert mit Ω. Die Amplitude hängt von Systemgrößen wie k und EA, aber auch von der Abstimmung der Erregung auf die Systemgrößen ab.

(d) Der Punkt Q bewegt sich nicht, wenn

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\left(\frac{l}{2},t\right)} = 0$$

für alle Zeiten t. D.h.

$$\sin \frac{\lambda l}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \frac{2n\pi c}{l} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für diese Frequenzen ist der Nenner der Ortsfunktion ungleich 0.

HAUSAUFGABE

Aufgabe 9

II. Ansatz von Bernoulli

(a) Das Problem wird durch die Wellengleichung beschrieben:

$$c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{S}{\mu}. \tag{27}$$

(b) Setzt man die partiellen Ableitungen des Produktansatzes von Bernoulli

$$w''(x,t) = X''(x)T(t) \quad \text{und} \quad \ddot{w}(x,t) = X(x)\ddot{T}(t) \tag{28}$$

in die Wellengleichung ein, so erhält man

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} =: -\omega^2 \tag{29}$$

bzw. die beiden gewöhnlichen DGL

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0, \tag{30}$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0. \tag{31}$$

Mit den vorgegebenen Ansätzen für diese Differentialgleichungen folgt insgesamt der Lösungsansatz:

$$w(x,t) = \left(A \sin \lambda x + B \cos \lambda x\right)\left(C \sin \omega t + D \cos \omega t\right), \quad \text{mit} \quad \lambda := \frac{\omega}{c} \tag{32}$$

(c) Die Randbedingungen lauten:

$$w(x=0,t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x=l,t) = 0. \tag{33}$$

(d) Aus der ersten Randbedingung folgt unmittelbar $B = 0$ und damit aus der zweiten $A \sin \lambda l = 0$. Diese Gleichung hat nicht-trivialen Lösungen bei

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l} \quad \text{bzw.} \quad \omega_k = \frac{kc\pi}{l}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ erhält man die gesuchten Eigenkreisfrequenzen. Nach Auswertung der Randbedingungen erhält man somit die Lösung

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \sin \omega_k t + D_k \cos \omega_k t) \sin \frac{\omega_k}{c} x. \tag{35}$$

(e) Diese wird nun an die Anfangsbedingungen $w(x,t=0) = w_A$ und $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$ angepasst. Die erste Anfangsbedingung liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \frac{k\pi}{l} x = w_0 \sin \frac{\pi}{l} x \tag{36}$$

mit der offensichtlichen Lösung

$$D_1 = w_0 \quad \text{und} \quad D_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}. \tag{37}$$

Dieses Ergebnis und die zweite Anfangsbedingung zusammen führen zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \omega_k \sin \frac{\omega_k}{c} x = 0. \tag{38}$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt für

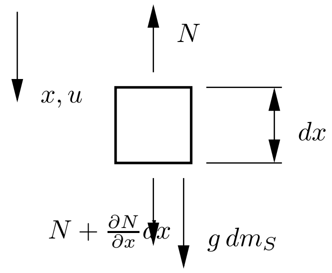
$$C_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

Damit haben wir die Lösung vollständig bestimmt:

$$w(x,t) = w_0 \cos \frac{c\pi}{l} t \sin \frac{\pi}{l} x. \tag{40}$$

Aufgabe 23

(a)



Masse des Seilstücks:

$$dm_S = \rho\, A\, dx \tag{41}$$

Zweites Newtonsches Gesetz
(Masse $\cdot$ Beschleunigung $= \sum$ äußere Kräfte):

$$dm_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N + \frac{\partial N}{\partial x} dx + g\, dm_S - N = \frac{\partial N}{\partial x} dx + g\, dm_S \tag{42}$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \frac{\partial N}{\partial x} dx + g\, \rho\, A\, dx \tag{43}$$

Materialgesetz $N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$ einsetzen:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \frac{\partial}{\partial x}\Big(EA \frac{\partial u}{\partial x}\Big) dx + g\, \rho\, A\, dx \tag{44}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\rho \tag{45}$$

Bewegungsdifferential-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \qquad \text{mit } c^2 = \frac{E}{\rho} \tag{46}$$

(b) Am oberen Ende keine Verschiebung:

$$u(x=0,t) = 0 \qquad \forall t \tag{RB 1}$$

Am unteren Ende hängt nur noch eine Einzelmasse. Das zweite Newtonsche Gesetz für diese Masse liefert:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -N(x=l) + mg \tag{47}$$

Mit dem Materialgesetz für das Seil $N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$ ergibt sich:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} + EA \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = mg \qquad \forall t \tag{RB 2}$$

(c) Im Gleichgewicht ruht das System: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Eingesetzt in die Bewegungsdifferential-Gleichung (46):

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = -\frac{g}{c^2} \tag{48}$$

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2} x^2 + Dx + E \tag{49}$$

(RB 1) ergibt $E = 0$:

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2} x^2 + Dx \tag{50}$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und (50) eingesetzt in (RB 2)

$$\Rightarrow D = g\Big(\frac{m}{EA} + \frac{l}{c^2}\Big) \tag{51}$$

Wir erhalten:

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2} x^2 + \Big(\frac{mg}{EA} + \frac{lg}{c^2}\Big) x \tag{52}$$

(d)

$$\tilde{u} = u - u_0 \Leftrightarrow \quad u = \tilde{u} + u_0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{g}{c^2} \tag{55}$$

Einsetzen in (46) ergibt die transformierte Bewegungsdifferential-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \tag{56}$$

Analog ergeben sich auch die transformierten Randbedingungen:

$$\tilde{u}(x=0,t) = 0 \tag{RBT 1}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}\Big|_{x=l} + \frac{EA}{m} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \tag{RBT 2}$$

(e) Die partielle Dgl. (56) kann mithilfe des Produktansatzes von Bernoulli in zwei gewöhnliche Dgln. überführt werden, von denen man die allgemeinen Lösungen kennt. Das führt auf die allgemeine Lösung

$$\tilde{u}_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \quad \text{mit} \tag{57}$$

$$T_k(t) = B_k \sin \omega_k t + C_k \cos \omega_k t, \tag{58}$$

$$X_k(x) = D_k \sin \frac{\omega_k}{c} x + E_k \cos \frac{\omega_k}{c} x \tag{59}$$

und (unendlich vielen) noch zu bestimmenden Konstanten $B_k, \ldots, E_k$ und Eigenfrequenzen ω_k.

Die erste Randbedingung (RBT 1) ergibt:

$$E_k = 0 \tag{60}$$

Mit der Abkürzung $\xi = \frac{EA}{m}$ ergibt die zweite Randbedingung (RBT 2) mit $E_k = 0$:

$$-\omega_k^2 T_k \cdot D_k \sin\frac{\omega_k}{c} l + \xi T_k D_k \frac{\omega_k}{c} \cos\frac{\omega_k}{c} l = 0$$
$$T_k(t) D_k (-\omega_k^2 \sin\frac{\omega_k}{c} l + \xi \frac{\omega_k}{c} \cos\frac{\omega_k}{c} l) = 0$$

Diese Gleichung ist für jedes k auszuwerten. Die Gleichung soll $\forall t$ gelten, und im Allgemeinen ist $T_k(t) \neq 0$. $D_k = 0$ bedeutet die triviale Lösung und scheidet damit aus. Es bleibt, dass der Klammerausdruck zu Null werden muss, damit die zweite Randbedingung (und gleichzeitig die erste) gelten. Es ist also zu fordern

$$\omega_k^2 \sin\frac{\omega_k}{c} l = \xi \frac{\omega_k}{c} \cos\frac{\omega_k}{c} l$$
$$\frac{\omega_k}{c} l \sin\frac{\omega_k}{c} l = \frac{\xi l}{c^2} \cos\frac{\omega_k}{c} l$$

und mit der Abkürzung $\eta = \frac{\omega_k}{c} l$

$$\tan\eta = \frac{\xi l}{\eta c^2}$$

Oder ausgeschrieben:

$$\tan\frac{l}{c}\omega_k = \frac{EA}{cm} \cdot \frac{1}{\omega_k} \tag{61}$$

Das folgende Diagramm zeigt die grafischen Lösungen für $l = L$, $l = 2L$ und $l = 5L$