PLENARÜBUNG

Aufgabe 1

(a) Beim partiellen Ableiten werden die unabhängigen Variablen, nach denen gerade nicht abgeleitet wird, als konstant angenommen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= -ac\sin(x+ct)\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -a\sin(x+ct)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -ac^2\cos(x+ct)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} &= -ac\cos(x+ct)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} &= -ac\cos(x+ct)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -a\cos(x+ct)
\end{aligned}$$

Wie erwartet ist $\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}$.

(b) Beim partiellen Ableiten werden die unabhängigen Variablen, nach denen gerade nicht abgeleitet wird, als konstant angenommen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= 2axe^{x^2-y^2}\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= -2aye^{x^2-y^2}
\end{aligned}$$

Für die totale Ableitung oder die Ableitung längs einer Kurve durch den x-y-Raum gilt: (in dieser Aufgabe wird diese Kurve durch $x = \sin y$ beschriebenen)

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy\\
\Rightarrow \frac{dw}{dy} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dy} \qquad (1)\\
&= 2axe^{x^2-y^2}\cdot\cos y - 2aye^{x^2-y^2}\cdot 1\\
&= 2a(x\cos y - y)e^{x^2-y^2}\ .
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man natürlich auch, wenn $x = \sin y$ in $w(x,y)$ eingesetzt und dann abgeleitet wird:

$$\begin{aligned}
w(x) &= ae^{\sin^2 y - y^2}\\
\frac{dw}{dy} &= a(2\sin y\cos y\ -\ 2y)e^{\sin^2 y - y^2}\\
&= 2a(\sin y\cos y\ -\ y)e^{\sin^2 y - y^2}\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Das Problem wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (2)$$

beschrieben. Zur Lösung soll der Ansatz von d'Alembert

$$w(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \qquad (3)$$

benutzt werden. Dieser hat die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned}
\dot{w}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}w(x,t)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\
&= -cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}
f_1' &:= \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)}\text{und} \qquad (5)\\
f_2' &:= \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
w(x,t=0) &= \left\{\begin{array}{cc} w_0, & -l_0 \le x \le l_0\\ 0, & \mathit{sonst}\end{array}\right\} =: w_A(x), \qquad (7)\\
\dot{w}(x,t=0) &= 0 \qquad (8)
\end{aligned}$$

bestimmt.

Aus (4) → (8) erhält man:

$$\begin{aligned}
\dot{w}(x,t) &= \left[-cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct)\right]_{t=0} = 0\\
&\Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) = 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

und durch Integration über x:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2A. \qquad (10)$$

Dabei ist $2A$ eine Integrationskonstante.
Analog ergibt sich aus (3) → (7):

$$\begin{aligned}
w(x,t=0) &= \left[f_1(x-ct) + f_2(x+ct)\right]_{t=0}\\
&= f_1(x) + f_2(x) = w_A(x). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Aus (10) + (11) folgt

$$f_1(x) = \frac{1}{2}w_A(x) + A. \qquad (12)$$

und analog aus (11) - (10)

$$f_2(x) = \frac{1}{2}w_A(x) - A. \qquad (13)$$

Setzt man nun (12) und (13) in (3) ein, so erhält man

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_A(x-ct) + w_A(x+ct)\right],\ -\frac{l}{2} \le x-ct, x+ct \le \frac{l}{2}. \qquad (14)$$

Die Anfangsauslenkung w_A spaltet sich in zwei Wellen mit halber Amplitude auf, die in entgegengesetzte Richtungen die Saite entlang laufen. Diese Lösung ist nur gültig, solange die Wellen die Ränder nicht berühren. Eine allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung der Randbedingungen. Die Saite ist an beiden Ende eingespannt, daher gilt:

$$w(x=-\frac{l}{2},t)=0 \quad \text{und} \quad w(x=\frac{l}{2},t)=0. \tag{15}$$

Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn an den Rändern Wellen gleicher Form aber mit umgekehrten Vorzeichen und entgegengesetzter Laufrichtung reflektiert werden. Das wird erreicht, wenn die Lösung periodisch mit wechselndem Vorzeichen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} w(x,t) = &\left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2}w_0, & -l_0 \leq x-ct+(2n)l \leq l_0 \\ -\frac{1}{2}w_0, & -l_0 \leq x-ct+(2n+1)l \leq l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\} + \\ &+ \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2}w_0, & -l_0 \leq x+ct+2nl \leq l_0 \\ -\frac{1}{2}w_0, & -l_0 \leq x+ct+(2n+1)l \leq l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dabei gilt $n \in \mathbb{Z}$. Die Saite schwingt mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2l}{c}. \tag{17}$$