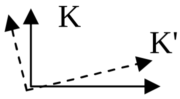
Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 13

I. Bewegung in einem nicht inertialen Bezugssystem II. Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität

I. Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem. $\vec{r}$ sei Radiusvektor eines Körpers im Bezugssystem K, welches sich bezüglich K' mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ dreht.



Zu bestimmen sind die Bewegungsgleichungen bezüglich des rotierenden Systems.

Lösung: Die Lagrangefunktion ist in diesem Fall

$$L = K = \frac{m\vec{v}\,'^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\vec{v} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2.$$ Als verallgemeinerte Koordinaten sind Komponenten des Radiusvektors $\vec{r}$ *bezüglich des rotierenden Koordinatensystems* gewählt. Für Komponenten des Kreuzproduktes gilt:

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_x = \Omega_y z - \Omega_z y$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_y = \Omega_z x - \Omega_x z$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_z = \Omega_x y - \Omega_y x .$$

Die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + m v_x\left(\Omega_y z - \Omega_z y\right) +$$

$$+ m v_y\left(\Omega_z x - \Omega_x z\right) + m v_z\left(\Omega_x y - \Omega_y x\right) +$$

$$\frac{m}{2}\left\{\left(\Omega_y z - \Omega_z y\right)^2 + \left(\Omega_z x - \Omega_x z\right)^2 + \left(\Omega_x y - \Omega_y x\right)^2\right\}$$

Die zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen erforderlichen Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = m v_x + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_x,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m v_y \Omega_z - m v_z \Omega_y +$$

$$m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_y \Omega_z - m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_z \Omega_y =$$

$$m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)_x + m\left(\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right)_x$$

Die Lagrangesche Gleichung, die der Koordinate x zugeordnet ist:

$$m\dot{v}_x + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{v}\right)_x = m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)_x + m\left(\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right)_x$$

oder $m\dot{v}_x = 2m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)_x + m\left(\vec{\Omega}\times\left(\vec{r}\times\vec{\Omega}\right)\right)_x$

In der Vektorform:

$$m\dot{\vec{v}} = 2m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right) + m\left(\vec{\Omega}\times\left(\vec{r}\times\vec{\Omega}\right)\right)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist die *Coriolis-Kraft*, das zweite die *Zentrifugalkraft.*

II. Statisches Gleichgewicht und seine Stabilität

Ein System mit der potentiellen Energie $U(q_1,\ldots,q_s)$ ist dann im statischen Gleichgewicht, wenn $\dfrac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ für alle *i*.

Ein Gleichgewicht ist *stabil*, wenn es einem *Minimum* der potentiellen Energie entspricht und *instabil* in allen anderen Fällen.

In der Nähe eines Gleichgewichts gilt die folgende Potenzentwicklung der potentiellen Energie (mehrdimensionale Taylor-Reihe):

$$U(q_1,q_2,\ldots,q_s) = U(q_1^*,q_2^*,\ldots,q_s^*) +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U}{\partial q_i}\cdot(q_i - q_i^*) + \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{s}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\cdot(q_i - q_i^*)\cdot(q_j - q_j^*) + \ldots$$

Der lineare Term ist identisch gleich Null wegen der Gleichgewichtsbedingung, somit ist die Änderung der potentiellen Energie in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes eine quadratische Form:

$$\Delta U = U(q_1,q_2,\ldots,q_s) - U(q_1^*,q_2^*,\ldots,q_s^*) =$$

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{s}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\cdot(q_i - q_i^*)\cdot(q_j - q_j^*) + (GhO)$$

Die notwendige und ausreichende Bedingung für ein stabiles Gleichgewicht ist, dass diese Form *positiv definit* ist. Wie Sie wissen, ist diese Forderung gleichbedeutend mit der Forderung nach positiver Definitheit der symmetrischen Matrix

$$\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right\} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\cdots\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_1}\cdots\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_s^2} \end{matrix}\right\}$$

Das ist dann der Fall, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\left|\begin{matrix} \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} - \lambda\right)\cdots\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\cdots\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_s^2} - \lambda\right) \end{matrix}\right| = 0$$

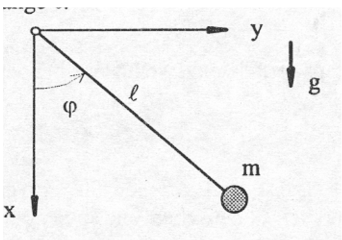
positiv sind.

Im *eindimensionalen* Fall ist das Stabilitätskriterium besonders einfach:

U hat ein Minimum, wenn $\dfrac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ (stabil)

U hat ein Maximum, wenn $\dfrac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$ (instabil).

Beispiel 1.



Gegeben sei ein mathematisches Pendel (Masse m auf einem masselosen Stab der Länge l) .

Man bestimme die Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität.

Lösung. Mit $U = -mgl\cos\varphi$ berechnet man die Gleichgewichtslagen aus der Gleichung $\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi = 0$. Sie hat zwei physikalisch verschiedene Lösungen: $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$.

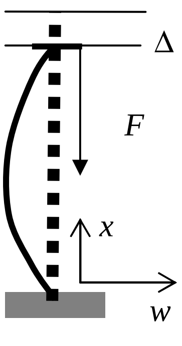
Die zweite Ableitung der potentiellen Energie nach φ gibt Auskunft über Stabilität:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgl\cos\varphi .$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_1} > 0 \quad \Rightarrow \text{ stabiles Gleichgewicht.}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_2} < 0 \quad \Rightarrow \text{ instabiles Gleichgewicht}$$

Beispiel 2.



Ein elastischer Stab sei an seinen Enden gelenkig gelagert und in der vertikalen Richtung mit einer Kraft F belastet. Gegeben: E, I, l, F . *Zu bestimmen sind die Stabilitätsbedingungen.*

Lösung. Vorbereitender Schritt: Berechnung der potentiellen Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx - F\Delta$$

Bestimmen wir die Verschiebung Δ. Zu diesem Zweck berechnen wir die Gesamtlänge des Stabes nach der Auslenkung:

$$l = \int_0^l ds = \int\sqrt{dx^2 + dw^2} = \int_0^{l-\Delta}\sqrt{1+w'^2}\,dx \approx$$

$$\approx \int_0^{l-\Delta}\left(1+\tfrac{1}{2}w'^2\right)dx \approx l - \Delta + \int_0^l \tfrac{1}{2}w'^2 dx$$

Die Längssteifigkeit eines schlanken Stabes ist viel größer als seine Biegesteifigkeit. In erster Annäherung kann der Stab als undehnbar angenommen werden. Das bedeutet, dass sich die Länge bei einer Auslenkung nicht ändert: $l - \Delta + \int_0^l \tfrac{1}{2}w'^2 dx = l$. Daraus folgt: $\Delta = \int_0^l \tfrac{1}{2}w'^2 dx$.

Für die potentielle Energie ergibt sich

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2}w'^2 dx$$

Mit dem Ansatz $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\dfrac{\pi n x}{l}$ (der den Randbedingungen $w(0)=0$, $w(l)=0$ genügt), bekommen wir

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)\cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$w''(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Die potentielle Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 \sin^2\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$-F\int_0^l \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2\frac{\pi n x}{l}dx$$

oder

$$U = \frac{l}{4}EI\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - \frac{Fl}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$= \frac{l}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2}\left[EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - F\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right]$$

Diese Energie hat bei $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$ ein Minimum, wenn *alle* Koeffizienten vor $a_n^{\,2}$ positiv sind: $EI\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^4 - F\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2 > 0$ oder $EI\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2 - F > 0$.

Der gerade Zustand ist stabil, wenn

$$\boxed{F < EI\left(\pi / l\right)^2}$$