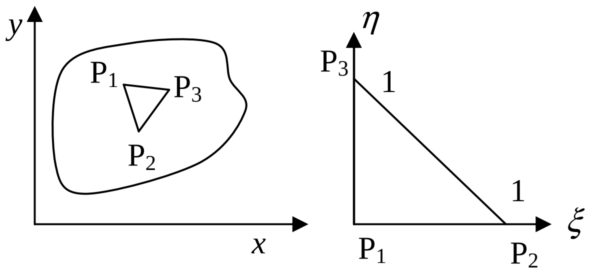
I. 2D-FE am Beispiel einer Membran

Potentielle Energie einer Membran hat die Form

$$U = \frac{S}{2}\int\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy$$, wobei S die Spannkraft pro Längeneinheit ist.



$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{cases}$$

$$dxdy = Jd\xi d\eta$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix}$$ -

Jakobi-Determinante.

Konvention: $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y$,....

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = (x_2 - x_1)\xi_x + (x_3 - x_1)\eta_x \\ 0 = (y_2 - y_1)\xi_x + (y_3 - y_1)\eta_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = (x_2 - x_1)\xi_y + (x_3 - x_1)\eta_y \\ 1 = (y_2 - y_1)\xi_y + (y_3 - y_1)\eta_y \end{cases}$$

$$\xi_x = \frac{y_3 - y_1}{J}, \quad \eta_x = -\frac{y_2 - y_1}{J},$$

$$\xi_y = -\frac{x_3 - x_1}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_2 - x_1}{J}.$$

$$\int\left(u_x^2 + u_y^2\right)dxdy = a\int u_\xi^2 d\xi d\eta + 2b\int u_\xi u_\eta d\xi d\eta + c\int u_\eta^2 d\xi d\eta$$

$$\begin{cases} a = \left[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\right]/J \\ b = -\left[(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)\right]/J \\ c = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]/J \end{cases}$$

Linearer Ansatz:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta$$

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta =$$

$$u_1\underbrace{(1 - \xi - \eta)}_{N_1} + u_2\underbrace{\xi}_{N_2} + u_3\underbrace{\eta}_{N_3}$$

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ u_3 = \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = u_1 \\ \alpha_2 = u_2 - u_1 \\ \alpha_3 = u_3 - u_1 \end{cases}$$

$$u_\xi = u_2 - u_1, \qquad u_\eta = u_3 - u_1$$

$$I_1 = \int u_\xi^2 d\xi d\eta = (u_2 - u_1)^2/2 = \left(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2\right)/2$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = 2\int u_\xi u_\eta d\xi d\eta = 2\frac{1}{2}(u_2 - u_1)(u_3 - u_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2u_1^2 - 2u_1u_3 - 2u_1u_2 + 2u_2u_3\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \int u_\eta^2 d\xi d\eta = \frac{1}{2}(u_3 - u_1)^2 = \frac{1}{2}\left(u_3^2 - 2u_3u_1 + u_1^2\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\int\left(u_x^2 + u_y^2\right)dxdy = \vec{u}^T S\vec{u} \quad \text{mit}$$

$$S = aS_1 + bS_2 + cS_3$$

II. Kubischer Ansatz im Dreieck

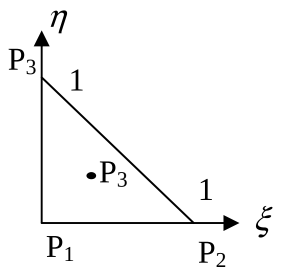
Potentielle Energie einer Platte ist

$$U_{Platte} = \frac{Eh^3}{24\left(1+\nu^2\right)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right\} \right] dxdy$$

Wenn wir Gleichgewicht einer Platte suchen, so müssen Verschiebungen und Ableitungen kontinuierlich sein. In jedem Knoten gibt es drei Knotenvariablen, insgesamt 9. Aber es gibt keinen (vollen) Ansatz mit 9 Koeffizienten. Kubischer Ansatz würde 10 Koeffizienten enthalten. Deshalb führen wir eine weitere Variable – Verschiebung im Schwerpunkt des Elements (1/3 jeweiliger Kante):

$u_1, u_{1x}, u_{1y}, u_2, u_{2x}, u_{2y}, u_3, u_{3x}, u_{3y}, u_4$



$$u(\eta,\xi) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2$$
$$+ c_7\xi^3 + c_8\xi^2\eta + c_9\xi\eta^2 + c_{10}\eta^3$$