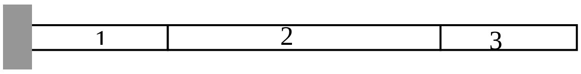
Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 12.

Methode der Finiten Elementen (statische Aufgaben)

I. Finite Elemente auf dem Beispiel eines Balkens.



Wir teilen den Balken in mehrere Bereiche und approximieren die Form des Balkens in jedem Bereich mit Hilfe von Ansatzfunktionen. Wählen wir die Ansatzfunktionen in Form von Polynomen. Da jedes Element an jedem Ende jeweils zwei Rand- bzw. Übergangsbedingungen erfüllen muss, muss der Ansatz mindestens 4 Koeffizienten enthalten. Wir müssen deshalb mindestens ein Polynom dritter Ordnung nehmen:

$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_3 x^3$.

Die Koeffizienten $a_1,..., a_4$ könnte man als generalisierte Koordinaten benutzen. Da Elemente in benachbarten Bereichen kontinuierlich in einander übergehen müssen, ist es aber am einfachsten als generalisierte Koordinaten unmittelbar die *Verschiebungen und die Neigungen in Knotenpunkten* zu wählen. Weiterhin führen eine neue, dimensionslose Variable ξ ein: $x = l\xi$. Mit dieser Variablen sieht der Ansatz wie folgt aus:

$u(\xi) = c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3$.

Als nächstes versuchen wir, die Koeffizienten des Ansatzes durch "Knotenvariablen" u_1, u_2, u_1' und u_2' auszudrücken.

$$\begin{cases} u_1 = c_1 \\ u_1' = \quad c_2 \\ u_2 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ u_2' = \quad c_2 + 2c_3 + 3c_4 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} c_1 = u_1 \\ c_2 = u_1' \\ c_3 = -3u_1 - 2u_1' + 3u_2 - u_2' \\ c_4 = 2u_1 + u_1' - 2u_2 + u_2' \end{cases}$$

$$u(\xi) = u_1 + u_1'\xi + \left(-3u_1 - 2u_1' + 3u_2 - u_2'\right)\xi^2 + \\ + \left(2u_1 + u_1' - 2u_2 + u_2'\right)\xi^3 =$$

$$= u_1 \underbrace{(1-3\xi^2+2\xi^3)}_{N_1} + u_1' \underbrace{(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)}_{N_2} + \\ + u_2 \underbrace{(3\xi^2 - 2\xi^3)}_{N_3} + u_2' \underbrace{(-\xi^2 + \xi^3)}_{N_4}$$

Die vier eingeführten Funktionen kann man auch in der folgenden Form schreiben:

$N_1 = (1+2L_1)L_2^2$, $\quad N_2 = L_1 L_2^2$

$N_3 = L_1^2(1+2L_2)$, $\quad N_4 = -L_1^2 L_2$.

wobei $L_1 = \xi$, $L_2 = 1-\xi$.

Bei den Integrationen ist es im Weiteren bequem die folgende Formel zu benutzen:

$$I_{pq} = \int_0^1 L_1^p L_2^q d\xi = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Zur Berechnung der potentiellen Energie brauchen wir das Integral $\int_0^1 u''^2 d\xi$.

$$u''(\xi) = u_1(-6+12\xi) + u_1'(-4+6\xi) + \\ + u_2(6-12\xi) + u_2'(-2+6\xi)$$

$$u''^2(\xi) = u_1^2(-6+12\xi)^2 + u_1'^2(-4+6\xi)^2 + \\ + u_2^2(6-12\xi)^2 + u_2'^2(-2+6\xi)^2 + \\ +2u_1u_1'(-6+12\xi)(-4+6\xi) \\ +2u_1u_2(-6+12\xi)(6-12\xi) \\ +2u_1u_2'(-6+12\xi)(-2+6\xi) \\ +2u_1'u_2(-4+6\xi)(6-12\xi) \\ +2u_1'u_2'(-4+6\xi)(-2+6\xi) \\ +2u_2u_2'(6-12\xi)(-2+6\xi)$$

$$\int_0^1 u''^2 d\xi = u_1^2 \cdot 12 + u_1'^2 \cdot 4 + u_2^2 \cdot 12 + u_2'^2 \cdot 4 + \\ +2u_1u_1' \cdot 6 \\ +2u_1u_2 \cdot (-12) \\ +2u_1u_2' \cdot 6 \\ +2u_1'u_2 \cdot (-6) \\ +2u_1'u_2' \cdot 2 \\ +2u_2u_2' \cdot (-6)$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

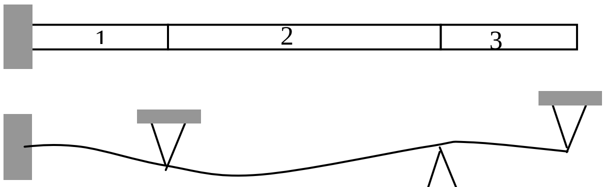
Die Matrix $\hat{S}$ nennt man die S*teifigkeitselementmatrix.*

Aber Vorsicht - in ursprünglichen Koordinaten:

$$\hat{S} = \frac{1}{l^3}\begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

$$U = \tfrac{1}{2} EI \vec{u}^T \hat{S} \vec{u} = \tfrac{1}{2} EI \sum_{i,j} u_i S_{ij} u_j \,.$$

Beispiel.



Gegeben: $u_1 = 0$, $u_2 = -0.05$, $u_3 = +0.05$, $u_1' = 0$, $u_4 = 0$.

Die Steifigkeitselementmatrix für *ein* Balkenelement mit Länge l haben wir eben berechnet. Die Länge des ersten Elements sei 1, des zweiten 2 und des dritten 1, $EI = 1$. Dann ist

$$\hat{S}_1 = \hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 \\ 12 & 16 & -12 & 8 \\ -12 & -12 & 12 & -12 \\ 12 & 8 & -12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

Potentielle Energie des Elementes 1 ist

$$U_{Element} = \tfrac{1}{2}\vec{u}^T \hat{S} \vec{u} = \tfrac{1}{2}\Big[u_1^2 \cdot 12 + u_1'^2 \cdot 4 + u_2^2 \cdot 12 + u_2'^2 \cdot 4 + $$
$$+ 2u_1 u_1' \cdot 6 + 2u_1 u_2 \cdot (-12) + 2u_1 u_2' \cdot 6 + 2u_1' u_2 \cdot (-6)$$
$$+ 2u_1' u_2' \cdot 2 + 2u_2 u_2' \cdot (-6)\Big]$$

Die gesamte Steifigkeitsmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & \boxed{12} & \boxed{-6} \\ 6 & 2 & \boxed{-6} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1.5} & \boxed{1.5} & -1.5 & 1.5 \\ \boxed{1.5} & \boxed{2} & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & \boxed{1.5} & \boxed{-1.5} \\ 1.5 & 1 & \boxed{-1.5} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{12} & \boxed{6} & -12 & 6 \\ \boxed{6} & \boxed{4} & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\cancel{u_1} \quad \cancel{u'_1} \quad u_2 \quad \underline{u'_2} \quad u_3 \quad \underline{u'_3} \quad \cancel{u_4} \quad \underline{u'_4})$$

$$\begin{pmatrix} u_2 & \underline{u_2'} & u_3 & \underline{u_3'} & \underline{u_4'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13.5 & -4.5 & -1.5 & 1.5 & 0 \\ -4.5 & 6 & -1.5 & 1 & 0 \\ -1.5 & -1.5 & 13.5 & 4.5 & 6 \\ 1.5 & 1 & 4.5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten $dU/dq_i = 0$. Die freien Variablen sind nur u_2', u_3', u_4'. Nur nach diese Variablen wird abgeleitet.

$$\begin{cases} -4.5u_2 & +6\underline{u_2'} & -1.5u_3 & +1\cdot\underline{u_3'} & +0\cdot\underline{u_4'} = 0 \\ 1.5u_2 & +1\cdot\underline{u_2'} & +4.5u_3 & +6\underline{u_3'} & +2\underline{u_4'} = 0 \\ 0\cdot u_2 & +0\cdot\underline{u_2'} & +6u_3 & +2\underline{u_3'} & +4\underline{u_4'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +6\underline{u_2'} & +1\cdot\underline{u_3'} & +0\cdot\underline{u_4'} = 4.5u_2 + 1.5u_3 \\ +1\cdot\underline{u_2'} & +6\underline{u_3'} & +2\underline{u_4'} = -1.5u_2 - 4.5u_3 \\ +0\cdot\underline{u_2'} & +2\underline{u_3'} & +4\underline{u_4'} = -6u_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{116}\begin{pmatrix} 20 & -4 & 2 \\ -4 & 24 & -12 \\ 2 & -12 & 35 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung:

$$\begin{pmatrix} u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = \frac{1}{116}\begin{pmatrix} 20 & -4 & 2 \\ -4 & 24 & -12 \\ 2 & -12 & 35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4.5u_2 + 1.5u_3 \\ -1.5u_2 - 4.5u_3 \\ -6u_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.827u_2 + 0.310u_3 \\ -0.465u_2 - 0.362u_3 \\ 0.232u_2 - 1.31u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0259 \\ 0.00517 \\ -0.0776 \end{pmatrix}$$

Somit sind alle 8 Knotenvariablen bekannt und die Form jedes Elementes lässt sich mit dem Ansatz 3. Ordnung direkt berechnen. Hier ist die Form: