

**Die Dissipationsfunktion. Zwangskräfte.****I. Die Dissipationsfunktion.**

Zur Berechnung von generalisierten *dissipativen* (Widerstands-) Kräften benutzt man Dissipationsfunktion.

Definieren wir eine Funktion  $D$ , deren Ableitungen nach Geschwindigkeitskomponenten mit Minus-Vorzeichen die Reibungskraftkomponenten ergeben:

$$F_x^{(1)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1}, F_y^{(1)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1}, \dots \quad (1)$$

Beispiele:

- **Gleitreibung:**  $D = \mu N |v_{rel}|$ ,  
 $\mu$  - Reibkoeffizient,  $N$ - Normalkraft
- **lineare Dämpfung:**  $D = \frac{1}{2} b v_{rel}^2$ ,  
 $b$ -Dämpfungskonstante
- **Luftwiderstand:**  $D = \frac{1}{3} k |v_{rel}|^3$ .

$v_{rel}$  ist relative Gleitgeschwindigkeit.

Wir wollen nun *verallgemeinerte dissipative Kräfte* berechnen. Bei Beschreibung eines Systems mit verallgemeinerten Koordinaten sind seine kartesischen Koordinaten Funktionen von verallgemeinerten Koordinaten:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_s).$$

Zur Berechnung der verallgemeinerten Kräfte berechnen wir die virtuelle Arbeit bei einer beliebigen Verrückung des Systems:

$$dW = \sum_i F_i dx_i = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} dx_i.$$

eine verallgemeinerte Kraft wird definiert als

$$Q_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$$

Daraus folgt für beliebige generalisierte Koordinaten  $q_i$ :

$$Q_{q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$$

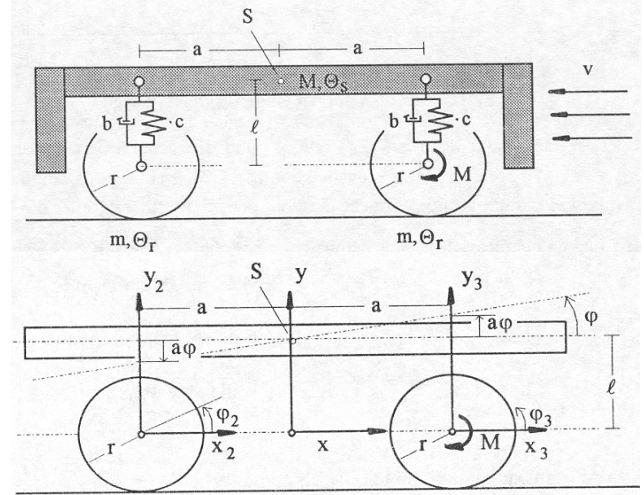
Mit der Dissipationsfunktion lassen sich die Lagrangegleichungen wie folgt schreiben:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

In dieser Form sind die folgenden Kräfte berücksichtigt: (a) alle konservativen Kräfte stecken bereits in der Lagrangefunktion, (b) dissipative (Widerstands-) Kräfte durch die

Dissipationsfunktion, (c) alle sonstigen mit  $Q_i$ .

**Beispiel.** Modell eines Fahrzeuges: Aufbau + zwei Räder über Feder-Dämpferbeine abgestützt. Nickbewegungen des Aufbaus seien klein. Ein Rad wird mit einem Moment  $M$  angetrieben. Der Aufbau erfährt einen Widerstand durch den mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  wehenden Wind. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf.



**Lösung.** Die Lagrangefunktion des Systems:

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \dot{\varphi}_3^2 - Mgy - \frac{1}{2} c (y_2 - l)^2 - \frac{1}{2} c (y_3 - l)^2$$

Die Dissipationsfunktion des Systems ist

$$D = \frac{1}{2} b \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} b \dot{y}_3^2 + \frac{1}{3} k |\dot{x} + v|^3.$$

Das Antriebsmoment muss über die virtuelle Arbeit  $\delta W_{Antrieb} = -M \delta \varphi_3$  berücksichtigt werden.

**Bindungsgleichungen:** Als generalisierte Koordinaten werden  $x, y, \varphi$  gewählt.

$$x_2 = x - a \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}$$

$$x_3 = x + a \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{x}$$

$$y_2 = y - a\varphi \Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{y} - a\dot{\varphi}$$

$$y_3 = y + a\varphi \Rightarrow \dot{y}_3 = \dot{y} + a\dot{\varphi}$$

$$\varphi_2 = -\frac{x_2}{r} = -\frac{x-a}{r} \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = -\frac{\dot{x}}{r}$$

$$\varphi_3 = -\frac{x_3}{r} = -\frac{x+a}{r} \Rightarrow \dot{\varphi}_3 = -\frac{\dot{x}}{r}$$

Für die Lagrangesche Funktion ergibt sich

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\varphi}^2 + 2\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2\frac{1}{2}\frac{\Theta_r}{r^2}\dot{x}^2 - Mgy - \frac{1}{2}c(y - a\varphi - l)^2 - \frac{1}{2}c(y + a\varphi - l)^2$$

oder

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\varphi}^2 + \left(m + \frac{\Theta_r}{r^2}\right)\dot{x}^2 - Mgy - c(y - l)^2 - ca^2\varphi^2$$

Die Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2}b(\dot{y} - a\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}b(\dot{y} + a\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{3}k|\dot{x} + v|^3 = b\dot{y}^2 + ba^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}k|\dot{x} + v|^3$$

Die virtuelle Arbeit des Antriebsmomentes ist

$$\delta W_{\text{Antrieb}} = \frac{M}{r}\delta x \Rightarrow Q_x = \frac{M}{r}$$

Die Bewegungsgleichungen:

$$\left(M + 2m + 2\frac{\Theta_r}{r^2}\right)\ddot{x} + k|\dot{x} + v|(\dot{x} + v) = M/r$$

$$M\ddot{y} + Mg + 2c(y - l) + 2b\dot{y} = 0$$

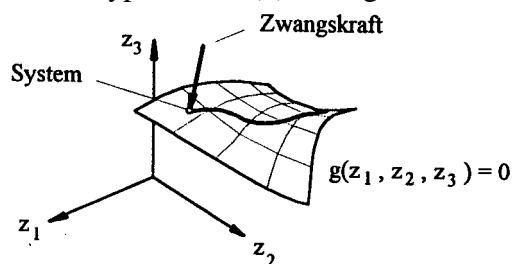
$$\Theta\ddot{\varphi} + 2ca^2\varphi + 2ba^2\dot{\varphi} = 0$$

**II. Zwangskräfte** können auch im Lagrangeformalismus berechnet werden.

Zwangskräfte stehen immer senkrecht zu den "erlaubten" Bewegungen. Gibt es in einem System eine Bindung der Form

$$g(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0, \quad (1)$$

so kann sich dieses System im  $q$ -Raum nur auf der Hyperfläche (1) bewegen:



Die Zwangskräfte sind senkrecht zu dieser Fläche gerichtet. Diese "senkrechte Richtung" kann analytisch berechnet werden: Erleiden alle Koordinaten  $q_i$  eine beliebige kleine Änderung, die mit der Bedingung (1) verträglich ist, so ändert sich  $g$  nicht, d.h.:

$$dg = \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial q_i} dq_i = 0.$$

Diese Gleichung kann als Skalarprodukt von

zwei Vektoren:  $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial q_s}\right)$  und

$\vec{dq} = (dq_1, \dots, dq_s)$  aufgefasst werden. Vektor

$\vec{dq}$  liegt dabei immer in der Hyperebene und

Vektor  $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial q_s}\right)$  folglich senkrecht

zu dieser Ebene. Das bedeutet, dass die Zwangskraft die gleiche Richtung hat, wie der Vektor  $\nabla g$ :

$$Q_i^{\text{Zwang.}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Die noch unbekannte Größe  $\lambda$  heißt Lagrange-Multiplikator und kann aus der Bedingung (1) berechnet werden.

**Lagrangesche Gleichungen 1. Art**  
für Systeme mit beliebigen eingepprägten  
Kräften und Zwangskräften

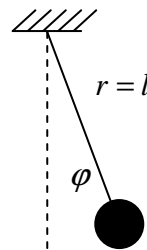
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_j + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}$$

$$g_1(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0$$

.....

$$g_k(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0$$

**Beispiel: Ein Pendel.** Man stelle die Bewegungsgleichungen auf und gebe die Stangenkraft an.



**Lösung:** Die Lagrangefunktion ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingung ist

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 + mgr \cos \varphi$$

Die Zwangsbedingung ist  $r - l = 0$ , somit

$$g(r, \varphi) = r - l.$$

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$1) m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = \lambda$$

$$2) m\dot{\varphi}^2 + 2mr\ddot{\varphi} + mgr \sin \varphi = \lambda \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$$

$$3) r - l = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0.$$

Die zweite Gleichung ist dann die gesuchte Bewegungsgleichung und die erste gibt die Zwangskraft an:

$$F_r = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = -m\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi.$$