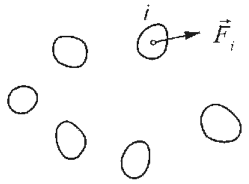
Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 3.
Generalisierte Kräfte, Lagrangesche Gleichungen 2. Art mit nicht konservativen Kräften

I. Verallgemeinerte (generalisierte) Kräfte

Gegeben sei ein Massenpunkthaufen



Wenn alle Körper um $\delta \vec{r}_i$ verschoben werden (das sind die "virtuellen Verrückungen"), werden die zwischen den Körpern wirkenden konservativen Kräfte eine Arbeit

$$dW = -dU = -\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 - \frac{\partial U}{\partial y_1}dy_1 - \frac{\partial U}{\partial z_1}dz_1 ...$$

leisten. Wir wissen, dass "Arbeit=Kraft mal Weg". Daraus ist ersichtlich, dass

$-\frac{\partial U}{\partial x_1}, -\frac{\partial U}{\partial y_1}, -\frac{\partial U}{\partial z_1}$ - Komponenten der Kraft sind. In verallgemeinerten Koordinaten gilt

$$dW = -dU = -\frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 - \frac{\partial U}{\partial q_2}dq_2 - ... - \frac{\partial U}{\partial q_i}dq_i - ...$$

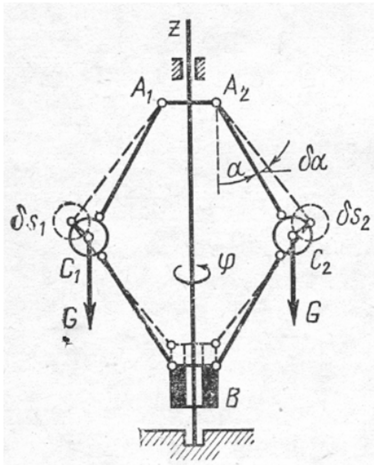
In Analogie werden die Ableitungen $-\frac{\partial U}{\partial q_i}$ *verallgemeinerte Kräfte* genannt, so dass die Regel "Arbeit= verallgemeinerte Kraft mal verallgemeinerte Verschiebung" auch weiterhin gilt.
Ähnlich werden verallgemeinerte *nichtkonservative* Kräfte definiert.

> Ist die Arbeit bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung gleich
> $dW = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + ... Q_i dq_i + ...$
> ist, so nennt man Q_i die der verallgemeinerten Koordinate q_i entsprechende verallgemeinerte Kraft.

Beispiel 1. Zu finden ist die verallgemeinerte Kraft Q_φ, die dem Winkel φ entspricht.
Lösung: Aus der Dynamik wissen wir, dass die bei einer Rotation geleistete Arbeit ist gleich $dW = M d\varphi$, wobei M das Kraftmoment ist.

> Das Kraftmoment M ist die dem Winkel zugeordnete verallgemeinerte Kraft.

Beispiel 2.
Ein Zentrifugalregler kann sich um die vertikale Achse drehen. Gewicht jeder Kugel ist G, andere Teile können als gewichtslos angenommen werden. Verallgemeinerte Koordinaten seien α und φ.

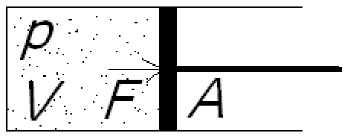


Zu finden sind die entsprechenden verallgemeinerten Kräfte.
Lösung:
$\delta s_1 = \delta s_2 = l \cdot \delta\alpha$
Die virtuelle Arbeit bei Änderung des Winkels α ist

$$\delta W_\alpha = -G \cdot \delta s_1 \cdot \sin\alpha - G \cdot \delta s_2 \cdot \sin\alpha = -2G \cdot l \cdot \delta\alpha \cdot \sin\alpha$$

Für die verallgemeinerte Kraft folgt
$Q_\alpha = -2G \cdot l \cdot \sin\alpha$.
$\delta W_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\varphi = 0$.

Beispiel 3. Ein Kolben kann sich in einem unter Druck p stehenden Zylinder bewegen. Als verallgemeinerte Koordinate des Kolbens sei das Volumen der linken Kammer gewählt. Zu berechnen ist die dieser verallgemeinerten Koordinate zugeordnete verallgemeinerte Kraft.



Lösung. Die auf die Oberfläche des Kolbens wirkende Kraft ist gleich $F = p \cdot A$. Die Arbeit dieser Kraft bei einer kleinen Verschiebung dx des Kolbens ist gleich $dW = F \cdot dx = p \cdot A \cdot dx = p \cdot dV$.

Die verallgemeinerte Kraft ist $Q_V = \frac{\partial W}{\partial V} = p$.

> Die der verallgemeinerten Koordinate "Volumen" zugeordnete verallgemeinerte Kraft ist Druck.

Tabelle der generalisierten Kräfte

Generalisierte Koordinate		Generalisierte Kraft	
kartesische Koordinate	x	x-Komponente der Kraft	F_x
Rotationswinkel	φ	Kraftmoment bezüglich desselben Punktes	M
Volumen	V	Druck	p
Im Allgemeinen	q		$\delta W / \delta q$

II. Lagrangesche Gleichungen 2. Art mit nicht konservativen Kräften

Die uns bekannten Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

können auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0$$

oder

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i\,.$$

Eine Bewegung kann sich aber nicht ändern, wenn wir Kräfte einer Natur durch die *gleichen Kräfte* anderer Natur ersetzen. Daraus folgt, daß die Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}=Q_i$ auch dann gilt, wenn Q_i beliebige verallgemeinerte Kräfte (nicht unbedingt konservative) sind.

Wenn wir die Kräfte als eine Summe aus konservativen und nicht konservativen Kräften darstellen, so gilt:

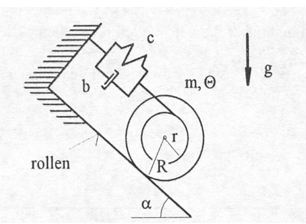
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}=Q_i^{(kons.)}+Q_i^{(n.kons.)}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}+Q_i^{(n.kons.)}$$

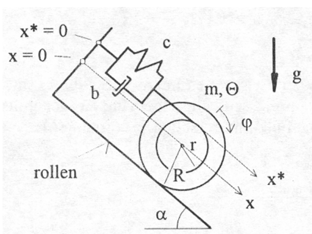
Diese Gleichung kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i^{(n.kons.)}}$$

Lagrangesche Gleichungen 2. Art für Systeme mit nicht konservativen Kräften

Beispiel 1. Gegeben sei eine abgesetzte Rolle mit den Radien *r* und *R* auf einer schrägen Ebene im Erdschwerefeld. Sie wird über einen Faden und eine Feder-Dämpferkombination gehalten. Die Ruhelänge der Feder sei *l*. Man ermittle die Bewegungsgleichungen des Systems.





Lösung. Die Lagrangefunktion des Systems:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}c\left(x^*-l\right)^2+mgx\sin\alpha$$

Die Dämpferkraft ist eine nicht konservative Kraft. Die zugehörige virtuelle Arbeit ist $\delta W_{Dämpfer}=-b\dot{x}^*\delta x^*$.

Die Koordinaten x, x^*, φ sind abhängig.

1. Bindung: Die Rolle rollt $\Rightarrow\quad x=R\varphi$.
2. Bindung: x^* liegt auf der Rolle $\Rightarrow$ $x^*=\left(R+r\right)\varphi$.

Daraus folgen die Zusammenhänge zwischen den Koordinaten:

$$\varphi=x/R\,,\qquad x^*=\frac{R+r}{R}x\,.$$

Die Lagrangefunktion ausgedrückt als Funktion der einzigen gebliebenen verallgemeinerten Koordinate x:

$$L=\frac{1}{2}\left(m+\frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{x}^2-\frac{1}{2}c\left(\frac{R+r}{R}x-l\right)^2+mgx\sin\alpha$$

Zur Berechnung der generalisierten Kraft, die derselben Koordinate x zugeordnet ist, berechnen wir die virtuelle Arbeit des Dämpfers

$$\delta W_{Dämpfer}=-b\frac{\left(R+r\right)^2}{R^2}\dot{x}\delta x\quad\Rightarrow$$

Die der Koordinate x zugeordnete nicht konservative verallgemeinerte Kraft ist somit

$$Q_x=-b\frac{\left(R+r\right)^2}{R^2}\dot{x}\,.$$

Die Lagrangegleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=Q_x$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\left(m+\frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{x}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\left(m+\frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{x}\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-c\frac{R+r}{R}\left(\frac{R+r}{R}x-l\right)+mg\sin\alpha$$

Somit ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung

$$\left(m+\frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{x}+c\frac{R+r}{R}\left(\frac{R+r}{R}x-l\right)-mg\sin\alpha=$$

$$=-b\frac{\left(R+r\right)^2}{R^2}\dot{x}$$