Lösungshinweis:

PLENARÜBUNG

Aufgabe 48

(a) Es hat $F_k = 2$ Koordinatenfreiheitsgrade. Es sollen $N = 3$ Koordinaten verwendet werden, so viele LAGRANGE-Gleichungen werden wir dann auch erhalten. Die Anzahl der Zwangsbedingungen ist $Z = N - F_k$, also gleich eins.

(b) Kinetische (T) und potentielle Energie (W):

$$T = \frac{1}{2}m\underline{\dot{x}}_C^2 + \frac{1}{2}\Theta^C\omega^2 \tag{1}$$

$$W = mg\underline{x}_C \cdot \underline{e}_y + \frac{1}{2}kl^2 \tag{2}$$

Dabei sind $\underline{x}_C$ der Ortsvektor des Massenmittelpunktes C:

$$\underline{x}_C = (u + a\sin\varphi)\underline{e}_x + (v - a\cos\varphi)\underline{e}_y \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}}_C^2 &= (\dot{u} + a\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\dot{v} + a\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 \\ &= \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{\varphi}(\dot{u}\cos\varphi + \dot{v}\sin\varphi)\end{aligned} \tag{4}$$

$$\underline{x}_C \cdot \underline{e}_y = v - a\cos\varphi \ , \tag{5}$$

ω die Drehgeschwindigkeit des Körpers:

$$\omega = \dot{\varphi} \ , \tag{6}$$

und l die Länge der Feder (und damit gleichzeitig ihre Verlängerung gegenüber der entspannten Länge, die ja gleich Null ist):

$$\underline{l} = \underline{x}_B - \underline{x}_A = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y - h\underline{e}_y \tag{7}$$

$$l^2 = |\underline{l}|^2 = u^2 + (v - h)^2 \tag{8}$$

Alles eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}T = &\frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{1}{2}(ma^2 + \Theta^C)\dot{\varphi}^2 \\ &+ ma\dot{\varphi}(\dot{u}\cos\varphi + \dot{v}\sin\varphi)\end{aligned} \tag{9}$$

$$W = mg(v - a\cos\varphi) + \frac{1}{2}k(u^2 + (v - h)^2) \tag{10}$$

(c) Zwangsbedingungen: Das Loslager verhindert ein Abheben des Körpers, es muß deshalb gelten: $v = 2a\cos\varphi$

$$f(q, \dot{q}, t) = v - 2a\cos\varphi = 0 \tag{11}$$

Dissipationsfunktion des Dämpfers:

$$D = \frac{\gamma}{2}\dot{x}_D^2 \tag{12}$$

$$= \frac{\gamma}{2}(\dot{u}^2 + 4a\dot{u}\dot{\varphi}\cos\varphi + 4a^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi) \tag{13}$$

Einzelkraft:

$$\delta W = \underline{F}\delta\underline{x}_C \tag{14}$$

$$= \cdots = -F\delta v - Fa\sin\varphi\delta\varphi \tag{15}$$

daher:

$$Q_u = 0 \tag{16}$$

$$Q_v = -F \tag{17}$$

$$Q_\varphi = -Fa\sin\varphi \tag{18}$$

(d) LAGRANGE-Gleichungen 1. Art allg.:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_{q_i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial q_i}\lambda k \tag{19}$$

Dabei ist $L = T - W$.

Wenn alles eingesetzt wird lauten die LAGRANGE-Gleichungen zusammen mit der Zwangsbedingung:

$$\begin{aligned}m(\ddot{u} + a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\varphi)& \\ +\gamma(\dot{u} + 2a\dot{\varphi}\cos\varphi) + ku &= 0\end{aligned} \tag{20}$$

$$m(\ddot{v} + a\ddot{\varphi}\sin\varphi + a\dot{\varphi}^2\cos\varphi) + kv - \lambda = kh - F - mg \tag{21}$$

$$\begin{aligned}(ma^2 + \Theta^C)\ddot{\varphi} + ma(\ddot{u}\cos\varphi + \ddot{v}\sin\varphi)& \\ +(mg + F - 2\lambda)a\sin\varphi& \\ +2a\gamma(\dot{u} + 2a\dot{\varphi}\cos\varphi)\cos\varphi &= 0\end{aligned} \tag{22}$$

$$v - 2a\cos\varphi = 0 \tag{23}$$

Das ist ein nichtlineares Differential-/ algebraisches Gleichungssystem zur bestimmung der vier Unbekannten u, v, φ und λ.