Lösungshinweis:

TUTORIUM

Aufgabe 65mod

(a) Randbedingungen:

$$u(0,t) = 0 \qquad \rightarrow \quad b = 0$$

$$u(l,t) = q(t) \qquad \rightarrow \quad a = \frac{1}{l}$$

An die Randbedingungen angepasster Ritz-Ansatz;

$$u(x,t) = \frac{x}{l} q(t)$$

Abkürzen: $q(t)$ einfach q

(b) Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho A(\dot{u}(x,t))^2 dx + \frac{1}{2} m(\dot{u}(l,t))^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho A \int_0^l \left(\frac{x}{l}\dot{q}\right)^2 dx + \frac{1}{2} m\dot{q}^2 \\ &= \left(\frac{1}{6}\rho A l + \frac{1}{2} m\right)\dot{q}^2 \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} U &= -mg(l + u(l,t)) - \int_0^l \rho A g(x + u(x,t))dx + \frac{1}{2}\int_0^l EA(u'(x,t))^2 dx \\ &= -mg(l+q) - \rho A g \int_0^l \left(x + \frac{x}{l} q\right) dx + \frac{1}{2} EA \int_0^l \frac{1}{l^2} q^2 dx \\ &= -mg(l+q) - \frac{1}{2}\rho A g l(l+q) + \frac{1}{2}\frac{EA}{l} q^2 \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \left(\frac{1}{6}\rho A l + \frac{1}{2} m\right)\dot{q}^2 + mg(l+q) + \frac{1}{2}\rho A g l(l+q) - \frac{1}{2}\frac{EA}{l} q^2 \end{aligned}$$

(c) Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) &= \left(\frac{1}{3}\rho A l + m\right)\ddot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= mg + \frac{1}{2}\rho A g l - \frac{EA}{l} q \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{3}\rho A l + m\right)\ddot{q} + \frac{EA}{l} q = mg + \frac{1}{2}\rho A g l$$

Die Eigenfrequenz ergibt sich durch Lösung der homogenen Dgl.

$$\ddot{q} + \frac{EA}{ml + \frac{1}{3}\rho A l^2} q = 0$$

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{EA}{ml + \frac{1}{3}\rho A l^2}}$$