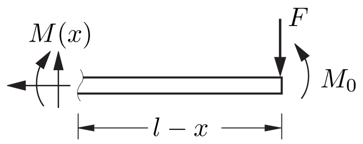
Lösungshinweis:

TUTORIUM

Aufgabe 78

(a) Biegemoment:



$$\Sigma M_s = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = M_0 - F(l-x)} \tag{1}$$

Aufstellen des elastischen Potentials U_{el}

$$\begin{aligned}
U_{el} &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l \big(M_0 - F(l-x)\big)^2 dx \\
&= \frac{1}{2EI}\Big[\frac{1}{3F}\big(M_0 - F(l-x)\big)^3\Big]_0^l \\
&= \frac{1}{6EIF}\big(M_0^3 - (M_0 - Fl)^3\big) \\
&= -\frac{1}{6EIF}\big(-3M_0^2 Fl + 3M_0F^2l^2 - F^3l^3\big) \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{6EI}l^3\Big(\frac{3M_0^2}{l^2} - \frac{3M_0}{l}F + F^2\Big)}}
\end{aligned} \tag{2}$$

Verschiebung $w_1(l)$

$$\frac{\partial U_{el}}{\partial F} = w_1(l) \Rightarrow w_1(l) = \underline{\underline{+\frac{l^3}{6EI}\big(2F - \frac{3M_0}{l}\big)}} \tag{3}$$

Verdrehung $\varphi_1(l)$

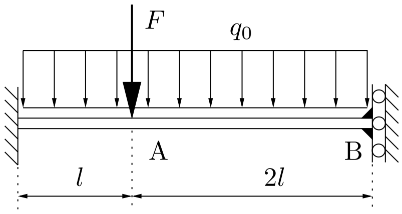
$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{el}}{\partial M_0} = \varphi_1(l) \Rightarrow \varphi_1(l) &= \frac{1}{6EI}\cdot l^2\big(6\frac{M_0}{l} - 3F\big) \\
&= \underline{\underline{\frac{l^2}{EI}\big(\frac{M_0}{l} - \frac{F}{2}\big)}}
\end{aligned} \tag{4}$$

(b) Verdrehung $\varphi_2(l)$ für $M_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{el}}{\partial M_0}\Big|_{M_0=0} = \varphi_2(l) \Rightarrow \varphi_2(l) &= \frac{1}{6EI}\cdot l^2\big(6\frac{M_0}{l} - 3F\big)\Big|_{M_0=0} \\
&= \underline{\underline{-\frac{1}{2EI}Fl^2}}
\end{aligned} \tag{5}$$

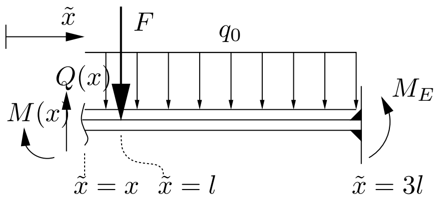
Aufgabe 69

1. An der Stelle, an der die Verschiebung bestimmt werden soll, wird eine fiktive Kraft F eingeführt.



Da das System statisch unbestimmt ist, wird der Einfluss der Führung am rechten Ende durch das Einspannmoment M_E beschrieben. Die dort angreifende Lagerkraft hat keinen Einfluss auf das Problem und wird daher ignoriert. Alternativ könnte auch diese Bindung durch eine Normalkraft ersetzt werden.

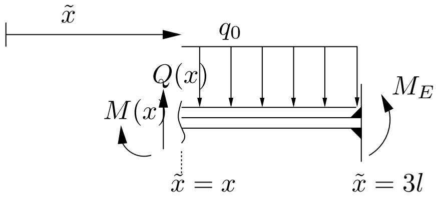
Zwischen der festen Einspannung und dem Punkt A hat dann die Querkraft den Verlauf



$0 < x < l$
Längskräfte der Übersicht wegen weggelassen

$$Q(x) = \int_x^{3l} q_0 d\tilde{x} + F = q_0(3l - x) + F, \tag{6}$$

und zwischen den Stellen A und B



$l < x < 3l$
Längskräfte weggelassen

$$Q(x) = \int_x^{3l} q_0 d\tilde{x} = q_0(3l - x). \tag{7}$$

Damit hat das Biegemoment im Bereich $0 < x < l$ den Verlauf:

$$\begin{aligned}
M(x) &= M_E - \int_x^{3l} Q(\tilde{x})d\tilde{x} \\
&= M_E - \int_x^{3l} q_0(3l - \tilde{x})d\tilde{x} - \int_x^l F d\tilde{x} \\
&= M_E - \frac{1}{2}q_0 l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9\Big] \\
&\qquad - Fl\Big(1 - \frac{x}{l}\Big)
\end{aligned} \tag{8}$$

und im Bereich $l < x < 3l$:

$$\begin{aligned}
M(x) &= M_E - \int_x^{3l} Q(\tilde{x})d\tilde{x} \\
&= M_E - \int_x^{3l} q_0(3l - \tilde{x})d\tilde{x} \\
&= M_E - \frac{1}{2}q_0 l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9\Big]
\end{aligned} \tag{9}$$

Beachte: Im Ergebnis für die Schnittlasten steckt noch das bisher unbekannte Einspannmoment M_E am rechten Ende.

3. Formänderungsenergie des Systems

$$U = \int_0^{3l} \frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI}dx \tag{10}$$

4. Bestimmung der noch unbekannten Lagerreaktionen (Einspannungsmoment rechts):

Der Satz von Castigliano sagt, dass die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der gesuchten Lagerreaktion gleich der dazugehörigen Verschiebung, also gleich Null ist. Mit $\varphi \approx w'$ folgt

$$\varphi\,(x = 3l) = 0 = \frac{\partial U}{\partial M_E} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial M_E}\Big(\int_0^{3l} \frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI}dx\Big) && (12)\\
&= \int_0^{3l} \frac{1}{EI}M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial M_E}dx\\
&= \int_0^{l} \frac{1}{EI}\Big[M_E - \frac{1}{2}q_0l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9\Big)\\
&\qquad - Fl\Big(1 - \frac{x}{l}\Big)\Big]dx\\
&+ \int_l^{3l} \frac{1}{EI}\Big[M_E - \frac{1}{2}q_0l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9\Big)\Big]dx\\
&= \frac{1}{EI}\Big[3l\,M_E - \frac{9}{2}q_0\,l^3 - \frac{1}{2}Fl^2\Big] && (13)
\end{aligned}$$

aufgelöst nach M_E:

$$M_E(x) = \frac{3}{2}q_0l^2 + \frac{1}{6}Fl \tag{14}$$

Dann lauten die Schnittlasten im Bereich $0 < x < l$:

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big] - Fl\Big(\frac{5}{6} - \frac{x}{l}\Big) \tag{15}$$

und im Bereich $l < x < 3l$:

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big] + \frac{1}{6}Fl \tag{16}$$

5. Durchsenkung am Punkt A: Der Satz von Castigliano sagt, daß die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der fiktiven Kraft F die Verschiebung an dieser Stelle ergibt. Die fiktive Kraft wird dabei nach der Differentiation zu Null gesetzt.

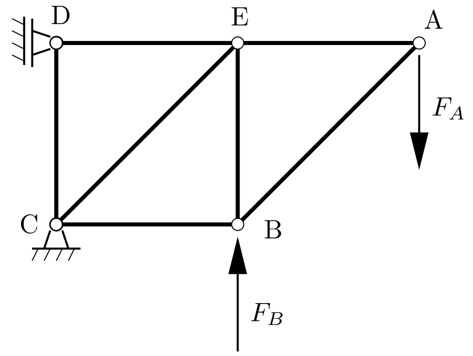
$$\begin{aligned}
w(x = l) &= \frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{F=0} && (17)\\
&= \frac{\partial}{\partial F}\Big(\int_0^{3l} \frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI}dx\Big)\Big|_{F=0}\\
&= \int_0^{3l} \frac{1}{EI}M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial F}dx\Big|_{F=0}\\
&= \int_0^{l} \frac{1}{EI}\Big[-\frac{1}{2}q_0l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big)\\
&\qquad - Fl\Big(\frac{5}{6} - \frac{x}{l}\Big)\Big]\Big[-l\Big(\frac{5}{6} - \frac{x}{l}\Big)\Big]dx\Big|_{F=0}\\
&+ \int_l^{3l} \frac{1}{EI}\Big[-\frac{1}{2}q_0l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big)\\
&\qquad + \frac{1}{6}Fl\Big]\Big[\frac{1}{6}l\Big]dx\Big|_{F=0}\\
&= \frac{1}{EI}\,l^3\Big\{q_0l\frac{75}{72} + F\frac{1}{4}\Big\}\Big|_{F=0} && (18)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow w(x = l) = \frac{25}{24}\,\frac{q_0l^4}{EI} \tag{19}$$

HAUSAUFGABE

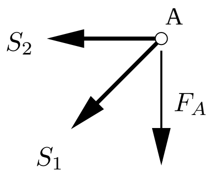
Aufgabe 73

(a)



Stab 7 ist ein Nullstab (Betrachte Knoten D).

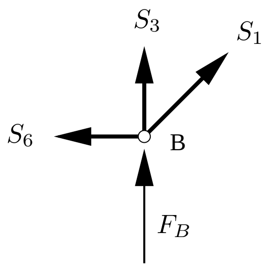
Knoten A:



$$S_2 = F_A \tag{20}$$

$$S_1 = -\sqrt{2}F_A \tag{21}$$

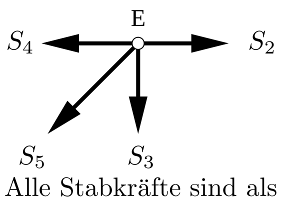
Knoten B:



$$S_3 = F_A - F_B \tag{22}$$

$$S_6 = -F_A \tag{23}$$

Knoten E:



$$S_5 = \sqrt{2}(F_B - F_A) \tag{24}$$

$$S_4 = 2F_A - F_B \tag{25}$$

Alle Stabkräfte sind als Zugkräfte eingezeichnet.

(b)

$$U = \sum_{j=1}^{7} \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{2EA} dx \tag{26}$$

$$= \frac{1}{2EA} \sum_{j=1}^{7} l_j S_j^2$$

$$l_2 = l_3 = l_4 = l_6 = l_7 = l$$

$$l_1 = l_5 = \sqrt{2}l$$

Alles einsetzen ergibt:

$$U = \frac{l}{EA}[F_A^2(\frac{7}{2} + 2\sqrt{2}) + ...$$

$$...F_B^2(1+\sqrt{2}) - F_A F_B(3 + 2\sqrt{2})] \tag{27}$$

(c)

$$U = \frac{l}{EA}(aF_A^2 + bF_A F_B + cF_B^2)$$

Forderung für Lager B (mit dem ersten Satz von Castigliano):

$$u_B = \frac{\partial U}{\partial F_B} = 0$$

$$\Longrightarrow bF_A + 2cF_B = 0$$

$$\Longrightarrow F_B = -\frac{b}{2c}F_A \tag{28}$$

(d) Einsetzen von F_B in die (komplementäre) Formänderungsenergie liefert

$$U = \frac{lF_A^2}{EA}(a - \frac{b^2}{4c}) \tag{29}$$

$$u_A = \frac{\partial U}{\partial F_A} = \frac{lF_A}{EA}(\frac{4ac - b^2}{2c}) \tag{30}$$

(e) Die Federsteifigkeit k berechnet sich aus $u_A = \frac{F_A}{k}$

$$k = \frac{EA}{l}(\frac{2c}{4ac - b^2}) \tag{31}$$

Bewegungsdifferentialgleichung (freie Schwingung)

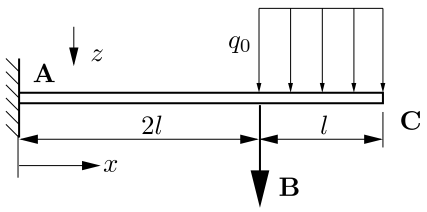
$$m\ddot{u}_A + ku_A = 0$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{EA}{lm}(\frac{2c}{4ac - b^2})} \approx 0,42\sqrt{\frac{EA}{ml}} \tag{32}$$

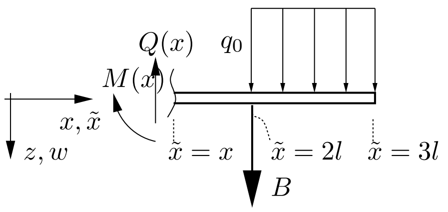
Aufgabe 79

(a)



(b) In den folgenden Freischnitten wird die Normalkraft aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen.

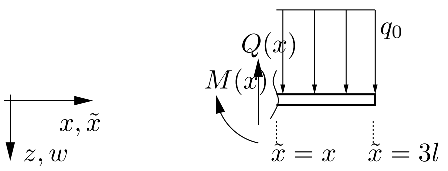
1. Bereich $(0 < x < 2l)$



$$\sum M_y^{\text{Schnitt}} = 0 = -M(x) - B(2l - x) - q_0 l\Big(\frac{5}{2}l - x\Big)$$

$$M(x) = (q_0 l + B)x - \Big(\frac{5}{2}q_0 l + 2B\Big)l \qquad (33)$$

2. Bereich $(2l < x < 3l)$



$$\sum M_y^{\text{Schnitt}} = 0 = -M(x) - q_0\frac{1}{2}(3l - x)^2$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{2}(3l - x)^2 \qquad (34)$$

(c) Die Formänderungsenergie des Balkens ist gleich:

$$W = \int_0^{3l} \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx \qquad (35)$$

Die Durchsenkung $w_B = w(x = 2l)$ an der Stelle **B** ist nach dem ersten Satz von Castigliano (Voraussetzungen: linear elastische, nicht vorgespannte Systeme) gleich:

$$\begin{aligned} w_B = \frac{\partial W}{\partial B} &= \frac{1}{EI}\int_0^{3l} M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial B}dx && (36)\\ &= \frac{1}{EI}\int_0^{2l}\Big[(q_0 l + B)x - \big(\frac{5}{2}q_0 l + 2B\big)l\Big]\Big[x - 2l\Big]dx \\ &\quad + \frac{1}{EI}\int_{2l}^{3l}\Big[-\frac{q_0}{2}(3l - x)^2\Big]\Big[0\Big]dx \\ &= \frac{1}{EI}\Big(-\frac{11}{3}q_0 l^4 - \frac{8}{3}Bl^3\Big) && (37)\end{aligned}$$

Hierbei wurde in (36) die Produktregel benutzt.

Die Durchsenkung an der Stelle **B** ist gleich Null, d.h. $w(x = 2l) = w_B = 0$. Mit Gleichung (37) ergibt sich:

$$B = -\frac{11}{8}q_0 l$$

(d) Die Lagerreaktionen in der festen Einspannung bei **A** ergeben sich aus dem statischen Kräfte- und Momentengleichgewicht zu:

$$A = -\frac{3}{8}q_0 l \qquad (38)$$

$$M_A = -\frac{1}{4}q_0 l^2 \qquad (39)$$

(A positiv nach oben, M_A im Uhrzeigersinn). Normalkräfte sind offensichtlich nicht vorhanden.