Lösungshinweis:
PLENARÜBUNG

Aufgabe 51

(a) Randbedingungen finden und Ansatz

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{1}$$

anpassen. Die 3 geometrischen Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} w(x=0)=0 &\quad\Leftrightarrow\quad a_0 = 0 \\ w'(x=0)=0 &\quad\Leftrightarrow\quad a_1 = 0 \\ w(x=l)=0 &\quad\Leftrightarrow\quad a_2 l^2 + a_3 l^3 = 0 \Rightarrow \quad a_2 = -a_3 l \end{aligned}$$

Damit lautet der angepasste Ansatz

$$\begin{aligned} w(x) &= a_2 x^2 + a_3 x^3 = -a_3 l x^2 + a_3 x^3 \\ w(x) &= a_3(x^3 - l x^2) \end{aligned} \tag{2}$$

mit den Ableitungen

$$w'(x) = a_3(3x^2 - 2lx) \tag{3}$$
$$w''(x) = a_3(6x - 2l) \tag{4}$$

(b) Berechnung der Formänderungsenergie W

$$\begin{aligned} W &= W^{Balken} + W^{Feder} \\ &= \frac{EI}{2}\int_0^l w''^2 dx + \frac{1}{2}c_M\left(w'(l)\right)^2 \\ &= \frac{EI}{2}a_3^2\int_0^l (6x-2l)^2 dx + \frac{1}{2}c_M a_3^2(3l^2-2l^2)^2 \\ &= \frac{EI}{2}a_3^2\int_0^l (36x^2 - 24xl + 4l^2)dx + \frac{1}{2}c_M a_3^2(l^2)^2 \\ &= \frac{EI}{2}a_3^2\left[12x^3 - 12lx^2 + 4l^2x\right]_0^l + \frac{1}{2}c_M a_3^2 l^4 \\ &= 2EIa_3^2 l^3 + \frac{1}{2}c_M a_3^2 l^4 \\ W &= a_3^2(2EIl^3 + \frac{1}{2}c_M l^4) \end{aligned} \tag{5}$$

Berechnung der äußeren Arbeit A

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l q_0 w(x) dx = q_0 a_3 \int_0^l (x^3 - lx^2)dx \\ &= q_0 a_3\left(\frac{1}{4}l^4 - \frac{1}{3}l^4\right) = -\frac{1}{12}q_0 a_3 l^4 \end{aligned} \tag{6}$$

(c) Berechnung des Freiwert a_3

$$\begin{aligned} \delta(W-A) &= \frac{\partial(W-A)}{\partial a_3}\delta a_3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad a_3(4EIl^3 + c_M l^4) &+ \frac{1}{12}q_0 l^4 = 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{12}\left(\frac{q_0 l}{4EI + c_M l}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

• Berechnung der Näherungslösung für $w(x)$ mit dem Freiwert a_3

$$w(x) = -\frac{1}{12}\left(\frac{q_0 l}{4EI + c_M l}\right)(x^3 - lx^2) \tag{8}$$

Aufgabe 59

(a) Wahl einer Ansatzfunktion $w(x,t)$

Die geometrischen Randbedingungen sind $w(0,t) = 0$ und $w'(l,t) = 0$. Diese werden z.B. von der Ansatzfunktion

$$w(x,t) = \varphi(x)q(t) = a_0 \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)q(t) \tag{9}$$

erfüllt. Im Folgenden wird diese Ansatzfunktion verwendet.

(b) potentielle und kinetische Energie
Die Ansatzfunktion hat die 2. Ableitung (nach der Koordinate)

$$w''(x,t) =) = -a_0\frac{\pi^2}{4l^2}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)q(t). \tag{10}$$

Somit hat das System die potentielle Energie

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x,t)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^4 EI}{32l^4}a_0^2 q^2(t)\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^4 EI}{32l^4}a_0^2 q^2(t)\left[\frac{x}{2} - \frac{l}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right]_0^l \\ &= \frac{\pi^4 EI}{32l^4}a_0^2 q^2(t)\left[\frac{l}{2} - 0 - 0 + 0\right] \\ &= \frac{\pi^4 EI}{64l^3}a_0^2 q^2(t) \end{aligned} \tag{11}$$

und die kinetische Energie

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{m}{2}\dot{w}^2(l,t) \\ &= \frac{\mu}{2}a_0^2\dot{q}^2(t)\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\mathrm{d}x + \frac{m}{2}a_0^2\dot{q}^2(t)\sin^2\left(\frac{\pi}{2l}l\right) \\ &= \frac{\mu}{2}a_0^2\dot{q}^2(t)\left[\frac{x}{2} - \frac{l}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right]_0^l + \frac{m}{2}a_0^2\dot{q}^2(t) \\ &= \frac{\mu}{2}a_0^2\dot{q}^2(t)\left[\frac{l}{2} - 0 - 0 + 0\right] + \frac{m}{2}a_0^2\dot{q}^2(t) \\ &= \left(\frac{\mu l}{4} + \frac{m}{2}\right)a_0^2\dot{q}^2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

(c) erste Eigenkreisfrequenz

Ausgehend von diesen Energien wird die Bewegungsgleichung mit dem Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{mit} \quad L = K - U \tag{13}$$

bestimmt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu l}{2} + m\right) a_0^2 \ddot{q}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32 l^3} a_0^2 q(t) = 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{q}(t) + \frac{EI\pi^4}{16\mu l^4 + 32 m l^3} q(t) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Das ist die Bewegungsgleichung für einen 1-Massen-Schwinger, aus der man die Eigenkreisfrequenz unmittelbar ablesen kann:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4 + 2 m l^3}}. \tag{15}$$

Offenbar genügt es zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenz den Rayleigh-Quotienten

$$\omega_1^2 = \frac{\int\limits_0^l EI\varphi''^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \mu\varphi^2(x)\mathrm{d}x + m\varphi^2(l)} \tag{16}$$

auszuwerten.