Lösungshinweis:
TUTORIUM

Aufgabe 53

Anpassen an die Randbedingungen
Die geometrischen Randbedingungen sind

$$w(0) = 0 \quad \text{und} \quad w'(0) = 0. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$a_0 = -a_2 \quad \text{und} \quad a_1 = 0, \tag{2}$$

die angepasste Ansatzfunktion lautet

$$w(x) = a_2 \left[\cosh\left(\frac{x}{l}\right) - 1\right] \tag{3}$$

und die Ableitungen

$$w'(x) = \frac{a_2}{l}\sinh\left(\frac{x}{l}\right) \quad \text{und} \quad w''(x) = \frac{a_2}{l^2}\cosh\left(\frac{x}{l}\right). \tag{4}$$

Arbeit der äußeren Kräfte

$$\begin{aligned} A &= \underline{M}_0 \cdot \underline{\varphi} = -M_0\underline{e}_y \cdot (-w'(2l)\underline{e}_y) \\ &= M_0 w'(2l) = M_0 \frac{a_2}{l}\sinh(2) \end{aligned} \tag{5}$$

Formänderungsenergie

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_0^{2l} EI w''^2(x)dx + \frac{1}{2}cw^2(l) \qquad (6) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2l} EI\frac{a_2{}^2}{l^4}\cosh^2\left(\frac{x}{l}\right)dx + \frac{1}{2}ca_2{}^2\left[\cosh(1)-1\right]^2 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{x}{l}\right) &= \left(\frac{e^{x/l}+e^{-x/l}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x/l} + 2 + e^{-2x/l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\cosh\left(\frac{2x}{l}\right) + 1\right] \end{aligned} \tag{7}$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} W &= \frac{EIa_2{}^2}{4l^4}\left[\frac{l}{2}\sinh\left(\frac{2x}{l}\right) + x\right]_0^{2l} + \frac{ca_2{}^2}{2}\left[\cosh(1)-1\right]^2 \\ &= \frac{EIa_2{}^2}{4l^4}\left[\frac{l}{2}\sinh(4) + 2l\right] + \frac{ca_2{}^2}{2}\left[\cosh(1)-1\right]^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Variation des elastischen Potentials
Im Gleichgewicht nimmt das elastische Potential ein Extremum an. Die Bedingung dafür ist

$$\delta\Pi = \delta(W - A) = 0 \tag{9}$$

und da a_2 die einzige generalisierte Koordinate ist, muss gelten

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0 \quad \text{also} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0. \tag{10}$$

Aus Gleichung (10) in Verbindung mit (8) folgt

$$a_2 = \frac{M_0 l^2 \sinh(2)}{EI\left(\frac{1}{4}\sinh(4)+1\right) + cl^3\left(\cosh(1)-1\right)^2} \tag{11}$$

Nach Einsetzen in (3) und Auswerten an der Stelle $x = 2l$ erhalten wir die Durchsenkung des Balkens am rechten Ende:

$$w(x=2l) = \frac{M_0 l^2 \sinh(2)\left(\cosh(2)-1\right)}{EI\left(\frac{1}{4}\sinh(4)+1\right) + cl^3\left(\cosh(1)-1\right)^2}. \tag{12}$$

Aufgabe 61

1. Überprüfen auf Erfüllung der Randbedingungen.

$$\omega(x=0,t) = 0 \tag{13}$$
$$\omega(x=l,t) = 0 \tag{14}$$
$$\omega'(x=0,t) = 0 \tag{15}$$

Die Ansatzfunktion erfüllt die geometrischen Randbedingungen!
Sei $\varphi(x) := x^2(l-x)^2$ der ortsabhängige Faktor der Ansatzfunktion w.

2. Substitution $\eta = \frac{x}{l}$

$$\varphi(\eta) = l^4\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 = l^4\left(\eta^4 - 2\eta^3 + \eta^2\right) \tag{16}$$

3. Rayleigh-Quotient für Biegung

Wird die Bewegungsgleichung mit dem Lagrange-Formalismus 2. Art aufgestellt und ein eingliedriger Lösungsansatz verwendet, so kann die Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz durch Vergleich mit der Bewegungsgleichung eines 1-Massen-Schwingers direkt abgelesen werden:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^1 EI\varphi''^2(\eta)d\eta}{\int_0^1 \rho A\varphi^2(\eta)d\eta} =: \frac{Z}{N}\frac{EI}{\rho A}. \tag{17}$$

Mit

$$\varphi''(\eta) = l^2(12\,\eta\,(\eta-1)+2) \tag{18}$$

sowie

$$Z = \int_0^1 \varphi''^2(\eta)d\eta \tag{19}$$
$$= 144\,l^5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) = \frac{4}{5}\,l^5 \tag{20}$$

und

$$N = \int_0^1 \varphi^2(\eta)d\eta \tag{21}$$
$$= l^9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{6}{7} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{630}\,l^9 \tag{22}$$

folgt daraus:

$$\omega_1 = \frac{22.45}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{23}$$

4. Warum große Abweichung von der „exakten“ Lösung?

Die Ansatzfuktion liefert für die Stelle

$$x = l \; : \; \omega'(x = l) = 0,$$

dies gilt jedoch nur für den auch rechts eingespannten Balken. Die obige Lösung entspricht in sehr guter Näherung der ersten Eigenfrequenz des beidseitig eingespannten Balkens, hier ist die „exakte“ Lösung.

$$\omega_1 = \frac{22.4}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{24}$$

Die vorgegebene Ansatzfunktion ist offenbar für das konkrete Problem weniger gut geeignet.

HAUSAUFGABE

Aufgabe 52

Die Ansatzfunktion wird an die geometrischen Randbedingungen angepasst:

$$\begin{aligned}
w(0) = 0 &\quad\Rightarrow\quad a_0 = -a_1\\
w'(0) = 0 &\quad\Rightarrow\quad a_2 = 0\\
w(2l) = 0 &\quad\Rightarrow\quad a_0 = -a_1\\
w'(2l) = 0 &\quad\Rightarrow\quad a_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad w(x) = a_1\left[\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) - 1\right] \tag{25}$$

$$\Rightarrow \quad w'(x) = -\frac{\pi}{l}a_1\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad w''(x) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a_1\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tag{27}$$

Formänderungsenergie:

$$\begin{aligned}
W &= W^{Balken} + W^{Feder}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2l} EIw''^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}c_F w^2(l)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2l} EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 a_1^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x\\
&\quad + \frac{1}{2}c_F a_1^2\left[\cos\left(\frac{\pi l}{l}\right) - 1\right]^2\\
&= \frac{1}{2}EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 a_1^2\left[\frac{1}{2}x + \frac{l}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right]_0^{2l}\\
&\quad + \frac{1}{2}c_F a_1^2 4\\
W &= \frac{1}{2}EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 a_1^2 l + 2c_F a_1^2
\end{aligned} \tag{28}$$

Arbeit der äußeren Kräfte:

$$A = Fw(l) = Fa_1(\cos\pi - 1) = -2Fa_1 \tag{29}$$

Elastisches Potential:

$$\Pi = \frac{1}{2}EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 a_1^2 l + 2c_F a_1^2 + 2Fa_1 \tag{30}$$

Variation des elastischen Potentials:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\delta a_1 \overset{!}{=} 0\\
(\delta a_1 \neq 0) \Rightarrow &\left[EIl\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + 4c_F\right]a_1 + 2F \overset{!}{=} 0\\
\Rightarrow a_1 &= -\frac{2F}{4c_F + EIl\left(\frac{\pi}{l}\right)^4}
\end{aligned} \tag{31}$$

Näherungslösung für Biegelinie:

$$w(x) = \frac{2F}{4c_F + EIl\left(\frac{\pi}{l}\right)^4}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right] \tag{32}$$

Aufgabe 63

Ansatzfunktion:
Zuerst prüfen wir, ob die vorgegebene Ansatzfunktion

$$u(x,t) = x^2(3l - 2x)q(t) \tag{33}$$

die geometrischen Randbedingungen erfüllt. Hier ist das lediglich eine Bedingung für die Verschiebung am linken Rand:

$$u(x = 0, t) = 0 \tag{34}$$

Diese geometrische Randbedingung ist erfüllt. Zudem genügt der Ansatz sogar der physikalischen Randbedingung (normalkraftfreies Ende) $u'(x = l, t) = 0$, was auf eine bessere Näherungslösung hindeutet.

Mit diesem Ansatz werden nun kinetische und potentielle Energie formuliert.
Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\dot{u}(x,t)^2 dx = \frac{1}{2}\rho A\dot{q}^2\int_0^l x^4(3l - 2x)^2 dx\\
&= \frac{1}{2}\rho A\dot{q}^2\int_0^l (9l^2x^4 - 12lx^5 + 4x^6)dx = \frac{13}{70}\rho A l^7\dot{q}^2
\end{aligned} \tag{35}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_0^l EAu'(x,t)^2 dx = \frac{1}{2}EAq^2\int_0^l 36x^2(l - x)^2 dx\\
&= 18EAq^2\int_0^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)dx = \frac{3}{5}EAl^5q^2
\end{aligned} \tag{36}$$

1. Eigenkreisfrequenz:

Nun wird für dieses System die Lagrange-Gleichung 2.Art aufgestellt. Da ein eingliedriger Ansatz vorgegeben ist, existiert auch nur eine generalisierte Koordinate q. Es folgt unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + \frac{42E}{13\rho l^2} q = 0 \tag{37}$$

Das ist offensichtlich die Bewegungsgleichung eines 1-Massen-Schwingers, aus der man die Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz direkt ablesen kann:

$$\omega_1 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{42E}{13\rho}}. \tag{38}$$

Rayleigh-Quotient:

Offenbar erhält man dieses Ergebnis direkt, wenn man den Rayleigh-Quotienten

$${\omega_1}^2 = \frac{\int_0^l EA{\varphi'}^2(x)dx}{\int_0^l \rho A\varphi^2(x)dx} \tag{39}$$

auswertet. Dabei ist $\varphi(x) = x^2(3l-2x)$ der ortsabhängige Faktor der Ansatzfunktion.