Lösungshinweis:
PLENARÜBUNG

Aufgabe 45

Gesucht sind die Kontaktkräfte (Normalkraft + Haftkraft) und die Bewegungsgleichung für das skizzierte Problem.

Die Haftkraft wirkt am Kontaktpunkt in x-Richtung. Die Normalkraft wirkt in y-Richtung.

D.h. $\Rightarrow$ Haftkraft $\equiv$ Zwangskraft in x-Richtung und

$\Rightarrow$ Normalkraft $\equiv$ Zwangskraft in y-Richtung.

Das System hat nur einen Freiheitsgrad. Muß man aber die Zwangskräfte bestimmen, muß man so tun als ob die Bewegung in Richtung der Zwangskräfte zulässig ist. D.h. unser System, wenn wir zugleich Haft- und Normalkraft bestimmen wollen, hat 3 Freiheitsgrade.

Die kinetische und potentielle Energie des Systems beträgt.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\Theta_c\dot{\varphi}^2$$
$$E_{pot} = -mgx\sin\alpha - mgy\cos\alpha$$

Die Bindungsgleichungen für das System sind.

$$f_1(x,\varphi) = x - r\varphi = 0$$
$$f_2(x,y) = y + r = 0$$

Bestimmung der Zwangskräfte Z_i

$$Z_i = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$$

Also für $q_i = x, y, \varphi$

$$Z_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = \lambda_1 \equiv \text{Haftkraft}$$
$$Z_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = \lambda_2 \equiv \text{Normalkraft}$$
$$Z_\varphi = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = -r\lambda_1$$

- Langrange 1.Art

Lagrange–Funktion: $L := E_{kin} - E_{pot}$

$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\Theta_c\dot{\varphi}^2 + mg(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Z_i + Q_i^*$$

- $\underline{q_1 = x}$: $\quad m\ddot{x} - mg\sin\alpha = \lambda_1$
- $\underline{q_2 = y}$: $\quad m\ddot{y} - mg\cos\alpha = \lambda_2$
- $\underline{q_3 = \varphi}$: $\quad \Theta^c\ddot{\varphi} = -r\lambda_1$

Wir erhalten drei Gleichungen für fünf Unbekannte ($\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\varphi}$, λ_1, λ_2). Die zwei Bindungsgleichungen müssen auch erfüllt werden. Damit hat man 5 Gleichungen für 5 Unbekannte. Durch Einsetzen der oben erhaltenen Bewegungsgleichungen in die zweimal abgeleiteten Bindungsgleichungen lassen sich dann die Lagrange–Parameter (λ_1, λ_2) bestimmen.

$$\ddot{f}_1(x,\varphi) = \ddot{x} - r\ddot{\varphi} = 0$$
$$\ddot{f}_2(y) = \ddot{y} = 0$$

- $\ddot{x}$ und $\ddot{\varphi}$ eliminieren:

$$\frac{1}{m}(\lambda_1 + mg\sin\alpha) - r\left(-\frac{\lambda_1 r}{\Theta^c}\right) = 0$$

mit $\Theta^c = \frac{1}{2}mr^2$

$$\boxed{\lambda_1 = -\frac{1}{3}mg\sin\alpha \equiv Z_x \equiv \text{Haftkraft}}$$

- $\ddot{y}$ eliminieren:

$$\frac{1}{m}\lambda_2 + g\cos\alpha = 0$$

$$\boxed{\lambda_2 = -mg\cos\alpha \equiv Z_y \equiv \text{Normalkraft}}$$

Wenn wir die Lagrange–Parameter (λ_1, λ_2) in das Gleichungsystem einsetzen, erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\ddot{y} = 0}$$

Zusatz:

<u>Bewegungsgleichung mit Langrange 2.Art:</u>

Die kinetische und potentielle Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta_c\dot{\varphi}^2 \qquad E_{pot} = -mgx\sin\alpha$$

1 FHG aber 2 Koordinaten $\Rightarrow 2 - 1 = 1$ Kinematische Beziehung: $\dot{x} = r\dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \quad E_{kin} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta_c}{r^2}\right)\dot{x}^2$$

mit $\Theta_c = \frac{1}{2}mr^2$

$$\Rightarrow \quad E_{kin} = \frac{1}{2}\left(\frac{3m}{2}\right)\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} = Q_i^*$$

mit $q_1 = x$

$$\left(\frac{3m}{2}\right)\ddot{x} - mg\sin\alpha = 0$$

Damit erhält man die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2}{3}\,g\sin\alpha}$$

Aufgabe 42

(a) Das System hat zwei Freiheitsgrade.

(b) Wenn man die Längskraft in der Stange berechnen will, ist es sinnvoll, die Koordinaten r_1, r_2 und φ zu wählen. Die Zwangsbedingung lautet dann

$$g_1 = r_1 - l = 0 \quad . \tag{1}$$

(c) Die kinetische Energie T und die potentielle Energie U lauten dann

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}^2\right) \ , \\ U &= -m_1 g r_1\cos\varphi - m_2 g r_2\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(r_2 - l_0\right)^2 \ . \end{aligned}$$

(d) Die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art lauten für dieses System mit f Freiheitsgraden und der Zwangsbedingung g_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1\ldots f+1 \quad . \tag{2}$$

λ_1 wird Lagrange-Multiplikator genannt.

(e) Mit $q_1 = r_1$, $q_2 = r_2$ und $q_3 = \varphi$ erhält man aus (2) die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_1\ddot{r}_1 - m_1 r_1\dot{\varphi}^2 - m_1 g\cos\varphi \\ 0 &= m_2\ddot{r}_2 - m_2 r_2\dot{\varphi}^2 + k\left(r_2 - l_0\right) - m_2 g\cos\varphi \\ 0 &= \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\ddot{\varphi} + \left(2m_1 r_1\dot{r}_1 + 2m_2 r_2\dot{r}_2\right)\dot{\varphi} \\ &\quad + g\left(m_1 r_1 + m_2 r_2\right)\sin\varphi \ . \end{aligned}$$

Dies sind drei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Koordinaten r_1, r_2 und φ und den Lagrange-Multiplikator λ_1. Das System muß um die Zwangsbedingung (1) ergänzt werden.

Aus der Zwangsbedingung (1) folgt sofort

$$r_1 = l \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r}_1 = 0$$

und damit

$$\lambda_1 = -m_1 l\dot{\varphi}^2 - m_1 g\cos\varphi$$

und die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= m_2\ddot{r}_2 - m_2 r_2\dot{\varphi}^2 + k\left(r_2 - l_0\right) - m_2 g\cos\varphi \\ 0 &= \left(m_1 l^2 + m_2 r_2^2\right)\ddot{\varphi} + 2m_2 r_2\dot{r}_2\dot{\varphi} \\ &\quad + g\left(m_1 l + m_2 r_2\right)\sin\varphi \end{aligned}$$

Die Bewegungsdifferentialgleichungen kann man für r_2 und φ (numerisch) lösen. Daraus kann die Längskraft in der Stange berechnet werden zu

$$\begin{aligned} F_{Stange} &= |\lambda_1| \\ &= \left|-m_1 l\dot{\varphi}^2 - m_1 g\cos\varphi\right| \end{aligned}$$

(f) Die Gleichgewichtslagen erhält man für $\ddot{r}_2 = 0$, $\dot{r}_2 = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$ und $\dot{\varphi} = 0$ aus den Bewegungsdifferentialgleichungen. Es ergibt sich

$$r_{2stat} = l_0 \pm \frac{m_2 g}{k} \quad , \quad \varphi_{stat} = 0 \ \vee \ \varphi_{stat} = \pi \ .$$

Die Lagerkraft im Lager P ergibt sich in beiden Fällen zu

$$F_{Pstat} = \left(m_1 + m_2\right) g \quad .$$
