Lösungshinweis:
TUTORIUM

Aufgabe 47

Das System hat nur einen Freiheitsgrad. Sollen jedoch die Zwangskräfte bestimmt werden, dann muss man so tun, als ob die Bewegung in Richtung der Zwangskräfte zulässig ist. D.h., wir geben unserem System zwei Freiheitsgrade x, y, wenn wir die Stangenkraft bestimmen wollen. Zusätzlich muss auch eine Zwangsbedingung eingeführt werden, die den zusätzlichen Freiheitsgrad wieder unterdrückt.

- Lagrange-Gl. 1.Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} = Z_i + Q_i \tag{1}$$

mit $q_1 = x$ und $q_2 = y$

Die kinetische und potentielle Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 \tag{2}$$

$$E_{pot} = m_1 g y + \frac{1}{2} k \left(H - y\right)^2 \tag{3}$$

In diesem System gleichen die generalisierten Dämpferkräfte den kartesischen Komponenten der Dämpferkraft. Grund dafür ist, dass die Bewegungen der beiden Massen mit den (generalisierten) kartesischen Koordinaten x und y beschrieben werden können. Dies ist ein Sonderfall. Normalerweise müssten die generalisierten Kräfte (Zahlen) mit den bekannten Formeln aus den kartesischen Kräften (Kraftvektoren) berechnet werden. Hier jedoch sind die kartesischen Komponenten der Kräfte die generalisierten Kräfte:

$$Q_x = \underline{F}_{\mathrm{D}} \cdot \underline{e}_x = -r\dot{x}\ ; \quad Q_y = \underline{F}_{\mathrm{D}} \cdot \underline{e}_y = 0 \tag{4}$$

Die holonome Nebenbedingung lautet:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0 \tag{5}$$

Damit ergeben sich die generalisierten Zwangskräfte zu:

$$Z_i = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad Z_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \cdot 2x \tag{7}$$

$$\text{und} \quad Z_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \cdot 2y. \tag{8}$$

Alles einsetzen in Lagrange-Gleichung 1.Art :

- $\underline{q_1 = x:}$ $\quad m_2\ddot{x} = -r\dot{x} + 2\lambda x \qquad (9)$
- $\underline{q_2 = y:}$ $\quad m_1\ddot{y} + m_1 g - k(H - y) = 2\lambda y \qquad (10)$

Wir erhalten zwei Gleichungen für drei Unbekannte ($\ddot{x}$, $\ddot{y}$, λ). Die Zwangsbedingung (5) liefert die dritte Gleichung.

Um $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ zu eliminieren, muss f zwei mal nach der Zeit abgeleitet werden:

$$\ddot{f}(x, y) = x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0 \tag{11}$$

Nun werden $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ aus den Bewegungsgleichungen in $\ddot{f} = 0$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} & x\left(\frac{2\lambda x}{m_2} - \frac{r\dot{x}}{m_2}\right) + \dot{x}^2 + \\ & + y\left(\frac{2\lambda y}{m_1} + \frac{k(H-y)}{m_1} - g\right) + \dot{y}^2 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\lambda = \frac{\frac{r}{m_2} x\dot{x} + \frac{k}{m_1}(H - y)y + yg - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\frac{2x^2}{m_2} + \frac{2y^2}{m_1}} \tag{13}$$

In Verbindung mit (7) und (8) sind damit die Zwangskräfte Z_x und Z_y bestimmt. Abweichend von der Aufgabenstellung verzichten wir auf die Bestimmung der Stangenkraft und belassen es dabei.

Aufgabe 41

Gesucht: Bewegungsdifferentialgleichungen und Normalkraft zwischen m_1 und der Bahn.

Die Normalkraft unterbindet die Vertikalbewegung der Masse m_1. Diese wird jetzt zugelassen, dafür aber die entsprechende Zwangskraft sowie die Zwangsbedingung hinzugezogen!

Kinematik: Seien $\underline{r}_1 = x_1\underline{e}_x + y_1\underline{e}_y$ und $\underline{r}_2$ die Ortsvektoren zu den Massen m_1 bzw. m_2. Dann ist:

$$\underline{r}_2 = \left(x_1 + l\sin\varphi\right)\underline{e}_x + \left(y_1 - l\cos\varphi\right)\underline{e}_y \tag{14}$$

$$\underline{v}_2 = \left(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_x + \left(\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_y \tag{15}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \tag{16}$$

also:

$$\begin{aligned} T\left(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{\varphi}, \varphi\right) = {} & \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \\ & + \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{17}$$

Potentielle Energie:

$$U = +m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = \left(m_1 + m_2\right) g y_1 - m_2 g l cos\varphi \tag{18}$$

Dissipationsfunktion:

$$D = \mu N \left|\dot{x}_1\right| \tag{19}$$

Zwangsbedingung:

$$g\left(y_1\right) = y_1 = 0 \tag{20}$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\big(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\big) + \frac{1}{2}m_2 \Big[\big(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2\Big] - \big(m_1+m_2\big)gy_1 + m_2 gl\cos\varphi \tag{21}$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_2\big(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big) \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \big(m_1+m_2\big)\ddot{x}_1 + m_2\big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\ddot{\varphi}\big) \tag{23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0;\quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \big(sgn\dot{x}_1\big)\mu N;\quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_1\dot{y}_1 + m_2\big(\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi}\big) \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = \big(m_1+m_2\big)\ddot{y}_1 + m_2\big(l\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\ddot{\varphi}\big) \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -\big(m_1+m_2\big)g;\quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} = 0;\quad \frac{\partial g}{\partial y_1} = 1 \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\Big[\big(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)l\cos\varphi + \big(\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)l\sin\varphi\Big] = m_2 l\big(\dot{x}_1\cos\varphi + \dot{y}_1\sin\varphi + l\dot{\varphi}\big) \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l\Big[\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\sin\varphi\dot{\varphi} + \ddot{y}_1\sin\varphi + \dot{y}_1\cos\varphi\dot{\varphi} + l\ddot{\varphi}\Big] \tag{29}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2\Big[\big(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\big) + \big(\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)l\cos\varphi\dot{\varphi}\Big] - m_2 gl\sin\varphi = m_2\big(-\dot{x}_1 l\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{y}_1 l\cos\varphi\dot{\varphi}\big) - m_2 gl\sin\varphi \tag{30}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0;\quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 \tag{31}$$

Lagrange- Formalismus (1. Art):

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten allgemein:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial q_i}. \tag{32}$$

Bezüglich der drei generalisierten Koordinaten $q_i \in \{x, y, \varphi\}$ erhält man die drei Lagrange-Gleichungen:

$$L_x:\quad \big(m_1+m_2\big)\ddot{x}_1 + m_2\big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\ddot{\varphi}\big) + \big(sgn\dot{x}_1\big)\mu N = 0 \tag{33}$$

$$L_y:\quad \big(m_1+m_2\big)\ddot{y}_1 + m_2\big(l\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\ddot{\varphi}\big) + \big(m_1+m_2\big)g = \lambda \ \equiv N \tag{34}$$

$$L_\varphi:\ m_2 l\big(\ddot{x}_1\cos\varphi + \ddot{y}_1\sin\varphi + l\ddot{\varphi}\big) + m_2 gl\sin\varphi = 0 \tag{35}$$

Einsetzen der Zwangsbedingung:

Mit der Zwangsbedingung

$$y_1 = 0 \quad \Rightarrow \dot{y}_1 = 0 \quad ;\ \ddot{y}_1 = 0 \tag{36}$$

folgt daraus schließlich:

$$L_y:\quad N = m_2\big(l\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\ddot{\varphi}\big) + \big(m_1+m_2\big)g \tag{37}$$

$$L_\varphi:\quad \ddot{x}_1\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \tag{38}$$

L_x: wie oben, jedoch kann N nun eingesetzt werden

HAUSAUFGABE

Aufgabe 43

Kinetische Energie: $$T = \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\Big) \tag{39}$$

Potentielle Energie: $$U = mgy \tag{40}$$

Dissipationsfunktion: $$D = \mu N|\underline{v}_{rel}| = \mu N\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{41}$$

N.R.:

$$\underline{r}_m = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y$$
$$\underline{v}_m = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y$$
$$|\underline{v}_m| = |\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Zwangsbedingung: $$g(x,y) = y - ax^2 = 0 \tag{42}$$

LANGRANGE-Funktion: $$L = T - U = \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\Big) - mgy \tag{43}$$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = m\ddot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \mu N\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -2ax$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\Big) = m\ddot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \mu N\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

LANGRANGE-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} - 0 + \mu N\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -2\lambda ax =: N_x \tag{44}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{y} + mg + \mu N\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda =: N_y \tag{45}$$

Aus der Zwangsbedingung (42) folgt:

$$y = ax^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = 2ax\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = 2a\dot{x}^2 + 2ax\ddot{x} \tag{46}$$

Einsetzen von $\dot{y}$ aus (46) in (44):

$$m\ddot{x} + \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2}} = -2\lambda ax$$

$$m\ddot{x} + \mu N \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -2\lambda ax =: N_x \tag{47}$$

Einsetzen von $\dot{y}$ und $\ddot{y}$ aus (46) in (45):

$$2am\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right) + mg + \mu N \frac{2ax\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2}} = \lambda$$

$$2am\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right) + mg + \mu N \frac{2ax}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \lambda =: N_y \tag{48}$$

Nun ist aber

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{\lambda + (-2ax\lambda)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4a^2x^2}\lambda \tag{49}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} = \lambda \tag{50}$$

Einsetzen von (50) in (47) und (48):

$$m\ddot{x} + \mu\lambda \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -2ax\lambda \tag{51}$$

$$2am\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right) + mg + \mu 2ax\lambda \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \lambda \tag{52}$$

mit $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = (\text{sign } \dot{x})$[1] folgt aus (51):

$$m\ddot{x} = -\left[2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})\right]\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = -\frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})}}} \tag{53}$$

Einsetzen von (53) in (52):

$$2am(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg =$$

$$= -\frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})} \cdot (1 - \mu 2ax \cdot (\text{sign } \dot{x}))$$

$$\left(2a\dot{x}^2 + g\right) m \cdot \left[2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})\right] +$$
$$+ 2amx\ddot{x}\left[\mu(\text{sign } \dot{x}) + 2ax\right] = m\ddot{x}\left[2ax\mu(\text{sign } \dot{x}) - 1\right]$$

$$\boxed{(1 + 4a^2x^2)\ddot{x} + \left[2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})\right]\left(2a\dot{x}^2 + g\right) = 0} \tag{54}$$

Bewegungsdgl.

[1] Die Signum-Funktion (auch Vorzeichen-Funktion) sign gibt das Vorzeichen des Argumentes (also -1 oder +1) an. Sie ist üblicherweise wie folgt definiert:

$$\text{sign } x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Für die Zwangskraft N ergibt sich damit aus (49):

$$N = -\sqrt{1 + 4a^2x^2} \cdot \frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})} \tag{55}$$

Mit der Bewegungsdgl. (54) kann man zudem die Beschleunigung $\ddot{x}$ eliminieren:

$$N = -\sqrt{1 + 4a^2x^2} \cdot \frac{-m\left[2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})\right]\left(2a\dot{x}^2 + g\right)}{(1 + 4a^2x^2) \cdot \left[2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})\right]}$$

$$\boxed{N = \frac{(2a\dot{x}^2 + g)m}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}} \text{ Zwangskraft} \tag{56}$$

Aufgabe 44

(a) generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = x\,; \quad q_2 = y\,; \quad q_3 = \varphi \tag{57}$$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}\left(m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Theta^{\mathrm{C}}\dot{\varphi}^2\right) \tag{58}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgx \tag{59}$$

Lagrange-Funktion

$$L = K - U$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\Theta^{\mathrm{C}}\dot{\varphi}^2 + mgx \tag{60}$$

Das Reibmoment soll in der Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2}r_\varphi\dot{\varphi}^2 \tag{61}$$

berücksichtigt werden.

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \tag{62}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \tag{63}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \Theta^{\mathrm{C}}\ddot{\varphi} \tag{64}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{65}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \tag{66}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{67}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = r_\varphi\dot{\varphi} \tag{68}$$

Zwänge, i.a. $f_k = f_k(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)$:

$$f_1 := x - R\cos\varphi = 0 \tag{69}$$
$$f_2 := y - R\sin\varphi = 0 \tag{70}$$

Daraus resultierende Zwangskräfte:

$$Z_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \text{ also:} \tag{71}$$
$$Z_1 = \lambda_1 \frac{\partial(x - R\cos\varphi)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial(y - R\sin\varphi)}{\partial x} = \lambda_1 \tag{72}$$
$$Z_2 = \lambda_2 \tag{73}$$
$$Z_3 = \lambda_1 R\sin\varphi - \lambda_2 R\cos\varphi \tag{74}$$

Alles eingesetzt in die Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + Z_i \tag{75}$$

führt (mit $i \in \{1, 2, 3\}$) zu den Gleichungen

$$m\ddot{x} - mg = \lambda_1 \tag{76}$$
$$m\ddot{y} = \lambda_2 \tag{77}$$
$$\Theta^{\mathrm{C}}\ddot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} = \lambda_1 R\sin\varphi - \lambda_2 R\cos\varphi \tag{78}$$

Zusammen mit den beiden Zwangsbedingungen (69) und (70) ergeben sich fünf Gleichungen für die drei unbekannten Koordinaten x, y und φ und die beiden Lagrange-Parameter λ_1 und λ_2.

Wir wollen jetzt aus diesem Gleichungssystem durch Einsetzen alle Unbekannten bis auf φ eliminieren. Zunächst werden die Zwangsbedingungen (69) und (70) nach den zu eliminierenden Größen umgestellt

$$x = R\cos\varphi\;;\quad \dot{x} = -R\dot{\varphi}\,\sin\varphi \tag{79}$$
$$\ddot{x} = -R\ddot{\varphi}\,\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\,\cos\varphi \tag{80}$$
$$y = R\sin\varphi\;;\quad \dot{y} = R\dot{\varphi}\,\cos\varphi \tag{81}$$
$$\ddot{y} = R\ddot{\varphi}\,\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\,\sin\varphi \tag{82}$$

und in die Gleichungen (76) und (77) eingesetzt (Gl. (78) enthält weder x noch y):

$$m\big(-R\ddot{\varphi}\,\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\,\cos\varphi - g\big) = \lambda_1 \tag{83}$$
$$m\big(R\ddot{\varphi}\,\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\,\sin\varphi\big) = \lambda_2 \tag{84}$$

Jetzt werden mit (83) und (84) die Lagrange-Parameter λ_1 und λ_2 in Gl. (78) eliminiert:

$$\big(\Theta^{\mathrm{C}} + mR^2\big)\ddot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} + mgR\sin\varphi = 0 \tag{85}$$

Gl. (85) ist die Bewegungsdifferentialgleichung für das System unter Beachtung der Zwänge. Gln. (83) und (84) sind Bestimmungsgleichungen für die Lagrange-Parameter λ_1 und λ_2. Diese wiederum sind die x- bzw. y-Komponenten der Kraft, die von der Fesselung auf das Pendel wirkt.

(b) generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = r\;;\quad q_2 = \varphi \tag{86}$$

Geschwindigkeit des Schwerpunkts zur Bestimmung der Kinetischen Energie:

$$\underline{x}_{\mathrm{C}} = r\underline{e}_r \tag{87}$$
$$\underline{v}_{\mathrm{C}} = \underline{\dot{x}}_{\mathrm{C}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \tag{88}$$
$$v_{\mathrm{C}}^2 = \underline{v}_{\mathrm{C}} \cdot \underline{v}_{\mathrm{C}} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{89}$$

($\underline{\dot{e}}_r = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$, das kann man durch Bezug auf eine ortsfeste kartesische Basis leicht zeigen.)

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}\big[mv_{\mathrm{C}}^2 + \Theta^{\mathrm{C}}\dot{\varphi}^2\big] = \frac{1}{2}\big[m\dot{r}^2 + (mr^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\dot{\varphi}^2\big] \tag{90}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgr\cos\varphi \tag{91}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = K - U \tag{92}$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}(mr^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\varphi \tag{93}$$

Dissipationsfunktion (wie bei a):

$$D = \frac{1}{2}r_\varphi\dot{\varphi}^2 \tag{94}$$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \tag{95}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + (mr^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\ddot{\varphi} \tag{96}$$
$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi \tag{97}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgr\sin\varphi \tag{98}$$
$$\frac{\partial D}{\partial r} = 0 \tag{99}$$
$$\frac{\partial D}{\partial \varphi} = r_\varphi\dot{\varphi} \tag{100}$$

Zwangsbedingungen:

$$f := r - R = 0 \tag{101}$$

Daraus resultierende Zwangskräfte:

$$Z_1 = \lambda\frac{\partial(r - R)}{\partial r} = \lambda \tag{102}$$
$$Z_2 = \lambda\frac{\partial(r - R)}{\partial \varphi} = 0 \tag{103}$$

Alles eingesetzt in die Lagrange-Gleichungen 1. Art führt zu:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi = \lambda \tag{104}$$
$$(mr^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = 0 \tag{105}$$

Zusammen mit der Zwangsbedingung (101) ergeben sich drei Gleichungen für die zwei unbekannten Koordinaten r und φ und den LAGRANGE-Parameter λ.

Durch Einsetzen der Zwangsbedingung Gl. (101) in Gl. (105) ergibt sich folgende Bewegungsdiff'gl. für das System unter Beachtung der Zwänge:

$$(mR^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\ddot{\varphi} + r_\varphi \dot{\varphi} + mgR \sin\varphi = 0 \tag{106}$$

Aus Gl. (104) kann der LAGRANGE-Parameter λ bestimmt werden. λ ist der Betrag der Kraft, der vom Gelenk auf das Pendel wirkt.

Vergleich: Das System hat einen Koordinatenfreiheitsgrad. Die Zahl der Zwangsbedingungen und damit die Zahl der Zwangskraftparameter ist gleich der Zahl der überzähligen Koordinaten.

Im Fall (b) ist die Koordinate $q_2 = \varphi$ eine reine Bewegungskoordinate, sie geht nicht in die Zwangsbedingung(en) ein. Die zugehörige LAGRANGE-Gleichung 1. Art ist von vornherein zwangskraftfrei.

Bemerkung: Es ist nicht bei allen Problemen möglich, die Zwangskraftparameter und alle überzähligen Koordinaten in geschlossener Form zu eliminieren.