Lösungshinweis:
PLENARÜBUNG

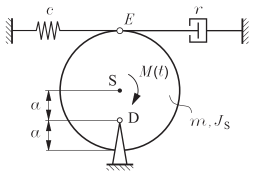
Aufgabe 28

Das skizzierte System wird von einem im Massenmittelpunkt S angreifenden Moment angetrieben. Nach einer Einschwingphase stellt sich ein stationärer Zustand mit kleinen Ausschlägen ein. (Gravitation spielt keine Rolle.)

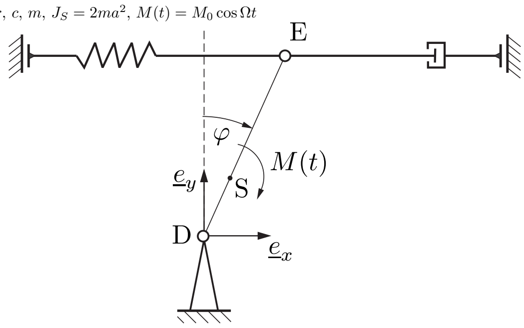
(a) Bestimmen Sie die lineare Bewegungsdifferentialgleichung!

(b) Wie groß ist die Kreisfrequenz der freien gedämpften Schwingung?

(c) Bestimmen Sie die Amplitude und den Phasenwinkel der stationären Schwingung!



Geg.: a, r, c, m, $J_S = 2ma^2$, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$



(a) Generalisierte Koordinate:

$$q_1 = \varphi \tag{1}$$

Kinematik:

$$\underline{r}_E = 3a \sin\varphi \underline{e}_x + 3a\cos\varphi \underline{e}_y \tag{2}$$
$$\underline{v}_E = 3a\cos\varphi\dot{\varphi}\underline{e}_x - 3a\sin\varphi\dot{\varphi}\underline{e}_y \tag{3}$$
$$\underline{r}_S = a\sin\varphi\underline{e}_x + a\cos\varphi\underline{e}_y \tag{4}$$
$$\underline{v}_S = a\cos\varphi\dot{\varphi}\underline{e}_x - a\sin\varphi\dot{\varphi}\underline{e}_y \tag{5}$$
$$v_S^2 = \underline{v}_S \cdot \underline{v}_S = a^2\dot{\varphi}^2 \tag{6}$$

Kinetische Energie: Hier sind 2 Möglichkeiten üblich:
I. Translationsenergie des Schwerpunktes + Rotationsenergie um den Schwerpunkt

$$T = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}J_S\dot{\varphi}^2 \tag{7}$$
$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(2ma^2)\dot{\varphi}^2 \tag{8}$$
$$T = \frac{3}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 \tag{9}$$

II. Die Kinetische Energie wird als Rotationsenergie um das Momentanzentrum definiert

$$T = \frac{1}{2}J_D\dot{\varphi}^2 \tag{10}$$
$$\text{Satz von Steiner:} \quad J_D = J_S + ma^2 = 3ma^2 \tag{11}$$
$$T = \frac{3}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 \tag{12}$$

Potentielle Energie:

$$U = \frac{1}{2}cx_E^2 = \frac{1}{2}c(3a\sin\varphi)^2 = \frac{9}{2}ca^2\sin^2\varphi \tag{13}$$

Dissipationsfunktion:

$$D = \frac{1}{2}r\dot{x}_E^2 = \frac{1}{2}r(3a\cos\varphi\dot{\varphi})^2 = \frac{9}{2}ra^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi \tag{14}$$

Sonstige generalisierte, nichtkonservative Kräfte:

$$\delta A = \underline{M} \cdot \delta\underline{\varphi} \tag{15}$$
$$\delta A = (-M(t)\underline{e}_z) \cdot (-\delta\varphi\underline{e}_z) = M(t)\delta\varphi \tag{16}$$
$$Q_\varphi = M(t) \tag{17}$$

Lagrange Funktion:

$$L = T - U \tag{18}$$
$$L = \frac{3}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 - \frac{9}{2}ca^2\sin^2\varphi \tag{19}$$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 3ma^2\ddot{\varphi} \tag{20}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -9ca^2\sin\varphi\cos\varphi \tag{21}$$
$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}} = 9ra^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi \tag{22}$$

Lagrangegleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}} = Q_\varphi \tag{23}$$
$$3ma^2\ddot{\varphi} + 9ca^2\sin\varphi\cos\varphi + 9ra^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi = M(t) \tag{24}$$

Linearisierung: $\sin\varphi \approx \varphi$; $\cos\varphi \approx 1$;
Linearisierte Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3r}{m}\dot{\varphi} + \frac{3c}{m}\varphi = \frac{M_0}{3ma^2}\cos\Omega t \tag{25}$$

(b) Kreisfrequenz der freien gedämpften Schwingung:
Homogene Differentialgleichung (Normalform):

$$\ddot{\varphi} + 2D\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \tag{26}$$
$$\text{Ansatz} \qquad \varphi(t) = Ae^{\lambda t}$$
$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2D\omega_0\lambda + \omega^2 = 0 \tag{27}$$

$$\lambda_{1/2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{D^2\omega_0^2 - \omega_0^2} \tag{28}$$
$$\text{Schwingfall heißt } D^2 < 1;$$
$$\lambda_{1/2} = -D\omega_0 \pm i\sqrt{\omega_0^2 - (D\omega_0)^2} \tag{29}$$

Der Imaginärteil entspricht der gesuchten Kreisfrequenz:

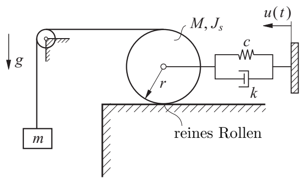
$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - (D\omega_0)^2} \tag{30}$$
$$\text{Koeffizientenvergleich liefert:}$$
$$\omega_0^2 = \frac{3c}{m} \qquad D\omega_0 = \frac{3r}{2m} \tag{31}$$

Somit ist die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems:

$$\omega_D = \sqrt{\frac{3c}{m} - \frac{9r^2}{4m^2}} \tag{32}$$

Aufgabe 29

Das skizzierte System (homogene Kreisscheibe M, Θ_s, masselose Umlenkrolle, ideales Seil, Masse m, lineare Feder c, linearer Dämpfer k) erfährt eine Fußpunkterregung $u(t) = \hat{u}\cos\Omega t$.



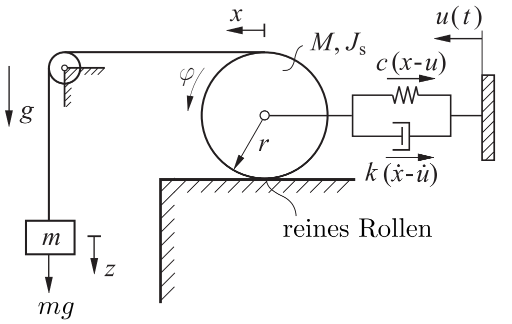
(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Bewegung des Scheibenschwerpunktes mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art auf.

Geg.: M, m, $\Theta_s = \frac{1}{2}Mr^2$, c, k, r, $\hat{u}$, Ω, g

(a) Das System hat einen Freiheitsgrad.

(b) Die Verschiebung des Scheibenmittelpunktes sei mit x bezeichnet.



Kinetische und Potentielle Energie:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2\ ; \tag{33}$$

$$V = -mgz + \frac{1}{2}c\,(x-u)^2 \tag{34}$$

Kinematik: $\varphi = x/r$ und $z = 2x$

Lagrange-Funktion:
(Generalisierte Koordinate: x)

$$L = T - V \tag{35}$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}Mr^2\frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2}m(2\dot{x})^2 + 2\,mgx - \frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{2}cu^2 + cux \tag{36}$$

Generalisierte Kraft:

$$\delta A = -F_D\delta(x-u) = -F_D(\delta x - \underbrace{\delta u}_{=0}) = -F_D\delta x \tag{37}$$

$$\overset{!}{=} Q_x\delta x \Rightarrow Q_x = -F_D = -kv_{rel} = -k(\dot{x}-\dot{u}) \tag{38}$$

Alternativ kann man den Dämpfer durch eine Dissipationsfunktion berücksichtigen:

$$D = \frac{k}{2}\,(\dot{x}-\dot{u})^2 \tag{39}$$

Bewegungsdifferentialgleichung:
Wählt man den Ansatz über die generalisierten Kräfte Q_i, gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad (q_1 = q = x) \tag{40}$$

Nutzt man hingegen die Dissipationsfunktion D, muß man

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{41}$$

schreiben. In beiden Fällen gelangt man zur Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\left(\frac{3}{2}M + 4\,m\right)\ddot{x} + k\dot{x} + cx = k\dot{u} + cu + 2mg \tag{42}$$