Lösungshinweis:
TUTORIUM

Aufgabe 27

(a) Kinematik: In der gezeichneten Lage sind die Federn bereits gespannt. Seien l_0 und l_u die Auslenkungen der oberen bzw. der unteren Feder.

Für das rollende Rad besteht zwischen Drehwinkel φ und Verschiebung des Mittelpunktes der Zusammenhang

$$\varphi = \frac{x}{R} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{R}. \tag{1}$$

Potentiellen und kinetischen Energie:

$$U = \frac{1}{2}c\,(l_0 + 2x)^2 + \frac{1}{2}c\left(l_u - \frac{R+r}{R}x\right)^2 \tag{2}$$

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_S\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_S}{R^2}\right)\dot{x}^2 \tag{3}$$

(b) Dissipationsfunktion:

$$D = \frac{1}{2}d\dot{x}^2 \tag{4}$$

Alternativ ist die Darstellung über eine generalisierte Kraft möglich:

$$Q_D = \underline{F}_D\frac{\partial \underline{r}_D}{\partial x} = -d\dot{x}\underline{e}_x \cdot \frac{\partial(x\underline{e}_x)}{\partial x} = -d\dot{x}. \tag{5}$$

Das Erregermoment muss über seine generalisierte Kraft in den Formalismus eingefügt werden:

$$Q_M = \underline{M}(t) \cdot \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x} = M(t)\underline{e}_z \cdot \frac{\partial(\varphi\underline{e}_z)}{\partial x} = \frac{M(t)}{R} \tag{6}$$

(c) Lagrange-Funktion:

$$L = K - U \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_S}{R^2}\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}c\left[(l_0 + 2x)^2 + \left(l_u - \frac{R+r}{R}x\right)^2\right] \tag{8}$$

Lagrange-Gleichung 2.Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = Q_M \tag{9}$$

$$\text{alternativ:}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_M + Q_D \tag{10}$$

In (9) wird der Einfluss des Dämpfers in der partiellen Ableitung der Dissipationsfunktion berücksichtigt, in (10) geschieht das mittels der generalisierten Kraft Q_D. Im Folgenden wird (9) verwendet.

partielle Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{J_S}{R^2}\right)\ddot{x} \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = c\left(-2(l_0 + 2x) + \frac{R+r}{R}(l_u - \frac{R+r}{R}x)\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = d\dot{x} \tag{13}$$

Durch Einsetzen in (9) erhält man die Differentialgleichung:

$$\left(m + \frac{J_S}{R^2}\right)\ddot{x} + d\dot{x} + \\ + c\left[2\,(l_0 + 2x) - \frac{R+r}{R}\left(l_u - \frac{R+r}{R}x\right)\right] = \frac{M(t)}{R} \tag{14}$$

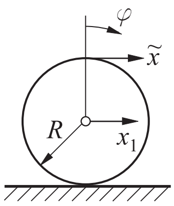
Im Gleichgewicht gilt $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ und nach Vorgabe auch $x = 0$. Außerdem ist hierfür auch $M(t)$ anzunehmen. Einsetzen dieser Bedingungen in (14) ergibt

$$2l_0 - l_u\frac{R+r}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_u = \frac{2R}{R+r}l_0 \tag{15}$$

Setzt man den Wert für l_u in (14) ein, so folgt:

$$\left(m + \frac{J_S}{R^2}\right)\ddot{x} + d\dot{x} + c\left[4 + \left(\frac{R+r}{R}\right)^2\right]x = \frac{M(t)}{R}. \tag{16}$$

Aufgabe 32



Kinematische Beziehungen:
$\dot{\varphi}_1 = \dot{x}_1/R$ und $\tilde{x} = 2\,x_1$

Massenträgheitsmoment:
$\Theta_1 = \frac{1}{2}m_1R^2$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ = \frac{3}{4}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \tag{17}$$

Potentielle Energie der Feder:

$$U = \frac{1}{2}\,c\,(x_2 - x_1)^2 \tag{18}$$

Berechnung der generalisierten Kraft:

Virtuelle Arbeit:

$$\delta W = P\delta\tilde{x} = P\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x_1}\,\delta x_1 = P\frac{\partial(2x_1)}{\partial x_1}\,\delta x_1 \\ = 2P\delta x_1 = Q_1\delta x_1 \\ \Rightarrow \quad Q_1 = 2P \tag{19}$$

Mit der Lagrange Funktion $L = T - U$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \qquad i = 1, 2 \tag{20}$$

(17) und (18) und (19) eingesetzt, es ergeben sich die Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\frac{3}{2}m_1\ddot{x}_1 - c\,(x_2 - x_1) = 2P(t) \tag{21}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c\,(x_2 - x_1) = 0 \tag{22}$$

HAUSAUFGABE

Aufgabe 30

(a) Kinematik:

$$\underline{r}_1 = x\underline{e}_x \;\Rightarrow\qquad \underline{v}_1 \equiv \dot{\underline{r}}_1 = \dot{x}\underline{e}_x \tag{23}$$

$$\underline{r}_2 = (x + l\sin\varphi)\underline{e}_x + l\cos\varphi\underline{e}_y \tag{24}$$

$$\underline{v}_2 = \big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_x + \big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_y \tag{25}$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m\underline{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\Big[\big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}m\big(2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\big) \end{aligned} \tag{26}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgl\cos\varphi + cx^2 \tag{27}$$

Lagrange - Funktion:

$$L = K - U \tag{28}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right) + mgl\cos\varphi - cx^2 \tag{29}$$

(b) Relativgeschwindigkeit zwischen Wind und Kugel

$$\underline{v}_{rel} = \underline{v}_m - \underline{v}_w \qquad\qquad \underline{v}_w = -v_w\underline{e}_y \tag{30}$$

$$\underline{v}_{rel} = \big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_x + \big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_y - \big(-v_w\big)\underline{e}_y$$

$$\underline{v}_{rel} = \big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_x + \big(v_w - l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_y \tag{31}$$

$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(v_w - l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2}$$

$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\big(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi\big)} \tag{32}$$

(c) Dissipationsfunktion

$$D = b\dot{x}^2 + \frac{1}{3}k|\underline{v}_{rel}|^3 \tag{33}$$

$$D = b\dot{x}^2 + \frac{k}{3}\left[\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\big(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi\big)\right]^{\frac{3}{2}} \tag{34}$$

(d) generalisierte Kräfte:

$$\delta W_p = \underline{P}(t)\underline{e}_x\delta\underline{r}_2 \tag{35}$$

$$= P(t)\underline{e}_x\left(\frac{\partial\underline{r}_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\underline{r}_2}{\partial\varphi}\delta\varphi\right) \tag{36}$$

$$\delta W_p = P(t)\big(\delta x + l\cos\varphi\delta\varphi\big) \tag{37}$$

$$Q_x = P(t) \tag{38}$$

$$Q_\varphi = P(t)l\cos\varphi \tag{39}$$

(e) Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 2m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{40}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 2m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi \tag{41}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx \tag{42}$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{x}} = 2b\dot{x} + \frac{k}{2}|\underline{v}_{rel}|\big(2\dot{x} + 2l\dot{\varphi}\cos\varphi\big) \tag{43}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml\dot{x}\cos\varphi + ml^2\dot{\varphi} \tag{44}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml\ddot{x}\cos\varphi - ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + ml^2\ddot{\varphi} \tag{45}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -ml\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi - mgl\sin\varphi \tag{46}$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{2}k|\underline{v}_{rel}|\big(2l^2\dot{\varphi} + 2l(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi)\big) \tag{47}$$

Lagrange - Gleichungen 2.Art:

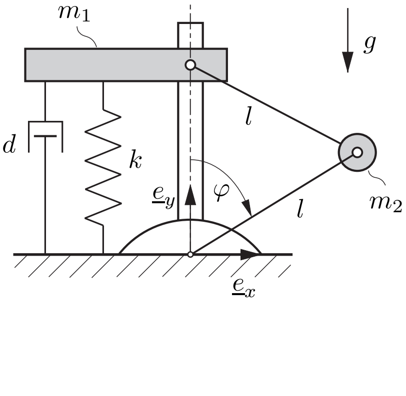
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i} = Q_i \tag{48}$$

Bewegungsdifferentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} &2m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2cx + 2b\dot{x} + \\ &\quad + k|\underline{v}_{rel}|\big(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\big) = P(t) \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi + mgl\sin\varphi + \\ &\quad + k|\underline{v}_{rel}|\big(l^2\dot{\varphi} + l(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi)\big) = P(t)l\cos\varphi \end{aligned} \tag{50}$$

Aufgabe 31



(a) Das System hat genau einen Freiheitsgrad, d.h. es kann auch nur eine generalisierte Koordinate geben. Ich wähle φ

(b) 1. Kinematik

$$\underline{r}_1 = 2l\cos\varphi\underline{e}_y \tag{51}$$
$$\underline{v}_1 = -2l\dot{\varphi}\sin\varphi\underline{e}_y \tag{52}$$
$$\underline{r}_2 = l\sin\varphi\underline{e}_x + l\cos\varphi\underline{e}_y \tag{53}$$
$$\underline{v}_2 = l\dot{\varphi}\cos\varphi\underline{e}_x - l\dot{\varphi}\sin\varphi\underline{e}_y \tag{54}$$

2. Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 4l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi \\ &+ \frac{1}{2}m_2\big(l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\big) \\ &= \big(2m_1\sin^2\varphi + \frac{1}{2}m_2\big)l^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned} \tag{55}$$

3. Potentielle Energie:

$$U = 2m_1 g\,l\cos\varphi + m_2 g\,l\cos\varphi + \frac{1}{2}k\big(2l\cos\varphi - 2l\big)^2 \tag{56}$$

4. Lagrange- Funktion:

$$\begin{aligned} L = T - U &= \big(2m_1\sin^2\varphi + \frac{1}{2}m_2\big)l^2\dot{\varphi}^2 ... \\ &- \big(2m_1 + m_2\big)g\,l\cos\varphi ... \\ &- 2k\,l^2\big(\cos\varphi - 1\big)^2 \end{aligned} \tag{57}$$

5. Dissipationsfunktion und/oder generalisierte Kräfte: Einige nicht-konservative generalisierte Kräfte lassen sich mittels einer Dissipationsfunktion beschreiben. Diese hat die Form

$$D = \frac{1}{\nu}b_\nu|\underline{v}_{rel}|^\nu, \tag{58}$$

wobei je nach Art der Widerstandskraft (Coulomb-Reibung, lineare Dämpfung, Luftwiderstand) $\nu = 1, 2, 3$ einzusetzen und der entsprechende Koeffizient b_ν zu verwenden sind.

Die zugehörige generalisierte Kraft kann dann mittels der Beziehung

$$Q_i := -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \tag{59}$$

bestimmt werden.

Im vorliegenden Fall (linearer Dämpfer mit Dämpfungskonstante d) sind $\nu = 2$ und $b_\nu = d$ zu verwenden. Damit lautet die Dissipationsfunktion

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}d|\dot{y}_1|^2 = \frac{1}{2}d(2l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 \\ &= 2dl^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{60}$$

Die (hier einzige) generalisierte Kraft ist:

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= -\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} \\ &= 4d\,l^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi \end{aligned} \tag{61}$$

Diese generalisierte Kraft lässt sich allerdings auch anders bestimmen. Nämlich ist nach Definition:

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \sum_{i=1}^{n}\underline{F}_i\cdot\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial\varphi} \\ &= \underline{F}_D\frac{\partial \underline{r}_1}{\partial\varphi} \\ &= -d\dot{y}_1\underline{e}_y\cdot(-2l)\sin\varphi\underline{e}_y \\ &= 4d\,l^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{62}$$

(c) Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \big(4m_1\sin^2\varphi + m_2\big)l^2\dot{\varphi} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= 8m_1\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 l^2 \\ &+ \big(4m_1\sin^2\varphi + m_2\big)l^2\ddot{\varphi} \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= 4m_1\sin\varphi\cos\varphi\,l^2\dot{\varphi}^2 + \big(2m_1 + m_2\big)g\,l\sin\varphi \\ &+ 4k\,l^2\big(\cos\varphi - 1\big)\sin\varphi \end{aligned} \tag{65}$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}} = 4d\,l^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi \tag{66}$$

Lagrangegleichungen 2. Art: Die Gleichungen lauten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi}\Big[+\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}}\Big] - \Big\{Q_\varphi\Big\} = 0 \tag{67}$$

Die Gleichung ohne beide geklammerten Terme gilt für Systeme, bei denen alle Kräfte aus einem Potential hergeleitet werden können. Der Term in eckigen Klammern wird benutzt, falls es Kräfte gibt, deren Einfluss mittels einer Dissipationsfunktion beschrieben wird. Wird der Anteil des Dämpfer dort berücksichtigt, so entfällt der Term in geschweiften Klammern. Dieser (bei dem man die generalisierte Kraft direkt berechnet) kann für jede Art von Kräften benutzt werden.

Im vorliegenden Problem benutzt man also entweder Q_φ aus Gleichung (61) bzw. (62) und setzt dies zwischen die geschweiften Klammern. Oder(!) man benutzt die Dissipationsfunktion (60) und setzt diese in die eckigen Klammern ein. Es ergibt sich dann die Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad 4m_1\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 l^2 &+ \big(4m_1\sin^2\varphi + m_2\big)l^2\ddot{\varphi} \\ &- 4k\,l^2\big(\cos\varphi - 1\big)\sin\varphi \\ &- \big(2m_1 + m_2\big)g\,l\sin\varphi + 4d\,l^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi = 0 \end{aligned} \tag{68}$$

(d) Gleichgewichtslage bei $\varphi_s = \frac{\pi}{3}$

Statisches Gleichgewicht heißt: $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow \; -4k\,l^2\big(\cos\varphi_s - 1\big)\sin\varphi_s - \big(2m_1 + m_2\big)g\,l\sin\varphi_s = 0$$

$$\Rightarrow \; -4k\,l^2\big(\frac{1}{2} - 1\big)\big(2m_1 + m_2\big)g\,l = 0 \tag{69}$$

$$2kl = \big(2m_1 + m_2\big)g$$

$$k = \frac{2m_1 + m_2}{2l}g \tag{70}$$

(e) Weitere Gleichgewichtslagen
bei der berechneten Steifigkeit: (70) in (69)

$$\Rightarrow \; \Big[-2\big(\cos\varphi_s - 1\big) - 1\Big]\sin\varphi_s = 0 \tag{71}$$

$$\Rightarrow \; \sin\varphi_s = 0 \;\Rightarrow \boxed{\varphi_{s2} = 0} \tag{72}$$

$$\text{außerdem } \cos\varphi_s = \frac{1}{2} \;\Rightarrow \boxed{\varphi_{s3} = -\frac{\pi}{3}} \tag{73}$$