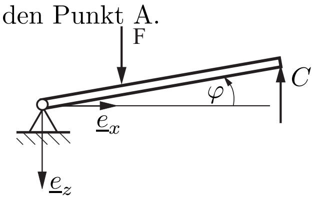
Lösungshinweis:
PLENARÜBUNG

Aufgabe 13

Der ausführliche Lösungsweg

1. Lagerkraft im Punkt C:

Die gesuchte unbekannte Lagerkraft wird sichtbar gemacht. Der dadurch entstehende Pseudofreiheitsgrad ermöglicht eine gedachte Drehung des starren Balkens um den Punkt A.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_P = a\cos\varphi \underline{e}_x - a\sin\varphi \underline{e}_z \tag{1}$$
$$\underline{r}_C = l\cos\varphi \underline{e}_x - l\sin\varphi \underline{e}_z \tag{2}$$

Variation:

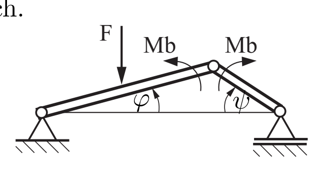
$$\delta\underline{r}_C = -\,l\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z \tag{3}$$
$$= \underline{\underline{-l\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{4}$$
$$\delta\underline{r}_P = -\,a\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - a\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z \tag{5}$$
$$= \underline{\underline{-a\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{6}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{P}\cdot\delta\underline{r}_P + \underline{C}\cdot\delta\underline{r}_C = 0 \tag{7}$$
$$(-Pa + Cl)\delta\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C = P\frac{a}{l}}} \tag{8}$$

2. Schnittmoment an der Stelle $x = b$:

Da im Prinzip der virtuellen Verrückungen nur das gesuchte Schnittmoment als unbekannte Größe auftauchen soll, wird das System derart kinematisch gemacht, daß ein Gelenk an der Stelle $x = b$ eingebaut wird. Nach einem Freischnitt am Gelenk treten entsprechend dem dritten Newtonschen Grundgesetz sowohl in horizontaler als auch vertikaler Richtung Zwangskräfte und zugehörige Reaktionkräfte auf. Da die Kräfte in entgegengesetzte Richtungen weisen, aber an der selben gedachten Verschiebung ´´arbeiten´´, addieren sich ihre Anteile an der virtuellen Arbeit zu Null. Die Schnittmomente hingegen drehen zwar entgegengesetzt, die zugehörigen Winkelverdrehungen der Systemteile jedoch auch und sind zudem noch ungleich.



Kinematische Beziehung:

Da das System lediglich einen Freiheitsgrad hat, müssen φ und ψ abhängig voneinander sein. Diese Abhängigkeit kann über die Vertikalverschiebung des Gelenkes bestimmt werden:

$$b\sin\varphi = (l-b)\sin\psi \tag{9}$$

Variation der Gleichung führt auf:

$$b\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi = (l-b)\cos\psi|_{\psi=0}\delta\psi \tag{10}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\delta\psi = \frac{b}{l-b}\delta\varphi}} \tag{11}$$

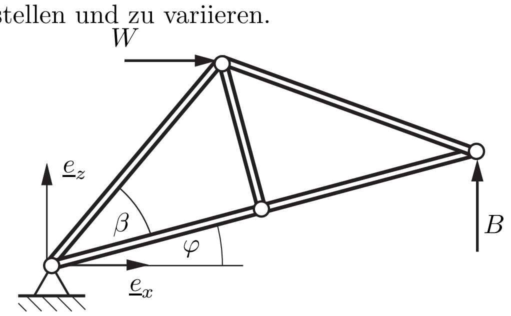
Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{P}\cdot\delta\underline{r}_P + M(b)\underline{e}_y\cdot\delta\underline{\varphi} + (-M(b)\underline{e}_y)\cdot\delta\underline{\psi} = 0 \tag{12}$$
$$(-Pa + M(b) + M(b)\frac{b}{l-b})\delta\varphi = 0 \tag{13}$$
$$(\delta\varphi \neq 0) \Rightarrow \underline{\underline{M(b) = P\frac{a}{l}(l-b)}} \tag{14}$$

Aufgabe 15

(a) Auflagerkraft B:

Bei komplizierteren Systemen, bei denen die virtuellen Verrückungen der Kraftangriffspunkte nicht sofort ersichtlich sind (bzw. deren Komponenten), ist es einfacher, die einzelnen Ortsvektoren vom Drehpunkt zu den Kraftangriffspunkten in der verschobenen Lage aufzustellen und zu variieren.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_W = l\cos(\varphi+\beta)\underline{e}_x + l\sin(\varphi+\beta)\underline{e}_z \tag{15}$$
$$\underline{r}_B = 2l\cos\varphi\cos\beta\underline{e}_x + 2l\sin\varphi\cos\beta\underline{e}_z \tag{16}$$

Variation:

$$\delta\underline{r}_W = -\,l\sin(\varphi+\beta)|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos(\varphi+\beta)|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z$$
$$= -l\sin\beta\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \tag{17}$$
$$\delta\underline{r}_B = -\,2l\cos\beta\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + 2l\cos\beta\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z$$
$$= 2l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \tag{18}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

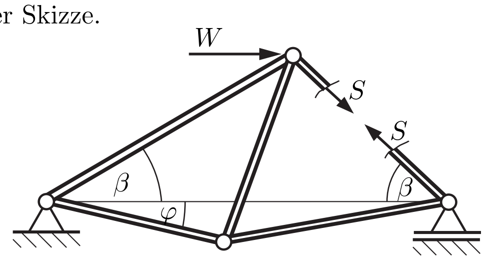
$$\delta A = \underline{W} \cdot \delta \underline{r}_W + \underline{B} \cdot \delta \underline{r}_B = 0 \tag{19}$$

$$(-Wl \sin\beta + 2Bl\cos\beta)\delta\varphi = 0 \tag{20}$$

$$(\delta\varphi \neq 0) \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{W}{2}\tan\beta}} \tag{21}$$

(b) Stabkraft S_{BC}:

Die gedachte Verschiebung an der die freigemachte gesuchte Stabkraft virtuelle Arbeit verrichtet, entnehme man der Skizze.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_W = l\cos(\beta - \varphi)\underline{e}_x + l\sin(\beta-\varphi)\underline{e}_z \tag{22}$$

$$\underline{r}_B = 2l\cos\varphi\cos\beta\underline{e}_x \tag{23}$$

Variation:

$$\begin{aligned}\delta\underline{r}_W &= l\sin(\beta-\varphi)|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos(\beta-\varphi)|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z \\ &= l\sin\beta\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \qquad (24)\\ \delta\underline{r}_B &= -2l\cos\beta\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x = \underline{0} \qquad (25)\end{aligned}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{W}\cdot\delta\underline{r}_W + \underline{S}\cdot\delta\underline{r}_W + (-\underline{S}\cdot\delta\underline{r}_B) = 0 \tag{26}$$

$$\Rightarrow Wl\sin\beta\delta\varphi + (S\cos\beta\underline{e}_x - S\sin\beta\underline{e}_z)\cdot\delta\underline{r}_W = 0 \tag{27}$$

$$\Rightarrow (Wl\sin\beta + Sl\cos\beta\sin\beta + Sl\sin\beta\cos\beta)\delta\varphi = 0 \tag{28}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S = \frac{-W}{2\cos\beta}}} \tag{29}$$