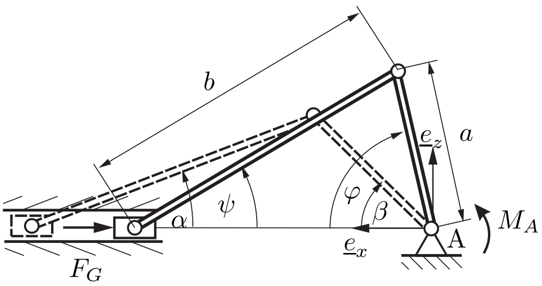
Lösungshinweis:
TUTORIUM

Aufgabe 10

Nach einer gedachten Verschiebung (Drehung) werden die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten in der ausgelenkten Lage aufgestellt und anschließend um die Gleichgewichtslage $\psi = \alpha$, bzw. $\beta = \varphi$ variiert. Das Aufstellen der virtuellen Arbeit liefert die gesuchte Gleichgewichtslage.



Die Belastungsgrößen, Ortsvektoren und ihre Variationen:

$$\underline{r}_F = (a\cos\varphi + b\cos\psi)\underline{e}_x \quad (1)$$
$$\delta\underline{r}_F = (-a\sin\varphi|_{\varphi=\beta}\delta\varphi - b\sin\psi|_{\psi=\alpha}\delta\psi)\underline{e}_x \quad (2)$$
$$\underline{\varphi} = -\varphi\underline{e}_y; \quad \underline{M}_A = M_A\underline{e}_y; \quad \underline{F}_G = -F_G\underline{e}_x; \quad (3)$$

$$\delta\underline{\varphi} = -\delta\varphi\underline{e}_y \quad (4)$$

Kinematische Beziehung:

$$a\sin\varphi = b\sin\psi \quad (5)$$
$$a\cos\varphi|_{\varphi=\beta}\delta\varphi = b\cos\psi|_{\psi=\alpha}\delta\psi \quad (6)$$

$$\delta\psi = \frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}\delta\varphi \quad (7)$$
$$\delta\underline{r}_F = \left(-a\sin\beta - a\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)\delta\varphi\underline{e}_x \quad (8)$$

Virtuelle Arbeit:

$$\delta A = \underline{F}_G\cdot\delta\underline{r}_F + \underline{M}_A\cdot\delta\underline{\varphi} = 0 \quad (9)$$
$$\left(F_G a\left(\sin\beta + \sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) - M_A\right) = 0 \quad (10)$$

außerdem gilt:

$$b\sin\alpha = a\sin\beta \quad (11)$$
$$b\cos\alpha + a\cos\beta = l \quad (12)$$

eingesetzt ergibt es:

$$F_G\left(b\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + a\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) - M_A = 0 \quad (13)$$
$$F_G\left(b\tan\alpha\cos\alpha + a\tan\alpha\cos\beta\right) - M_A = 0 \quad (14)$$
$$F_G\tan\alpha\left(b\cos\alpha + a\cos\beta\right) - M_A = 0 \quad (15)$$
$$\tan\alpha = \frac{M_A}{F_G l}, \quad (16)$$
$$\text{also:} \quad \alpha = \arctan\frac{M_A}{F_G l}. \quad (17)$$

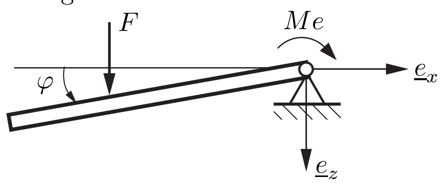
Aufgabe 11

Anmerkung:

Die Streckenlast wird zunächst durch ihre resultierende Kraft ersetzt. Sie hat den Betrag $F = \frac{q_0 l}{2}$ und greift im Abstand $x = \frac{2}{3}l$ vom Punkt A an.

1. Einspannmoment:

   Zur Berechnung des Einspannmomentes wird zunnächst die entsprechende Bindung gelöst und das Einspannmoment als unbekanntes Moment angetragen. Das System wird somit kinematisch gemacht, d. h. die dreiwertige feste Einspannung wird durch ein Festlager ersetzt. Die virtuelle Verschiebung stellt eine Drehung um den Punkt A dar.

   Ortsvektor zum Angriffspunkt der Resultierenden:

   $$\underline{r}_F = -\frac{2l}{3}\cos\varphi\underline{e}_x + \frac{2l}{3}\sin\varphi\underline{e}_z \quad (18)$$

   Variation:

   $$\delta\underline{r}_F = \frac{2l}{3}\sin\varphi\Big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + \frac{2l}{3}\cos\varphi\Big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z = \underline{\underline{\frac{2l}{3}\delta\varphi\underline{e}_z}} \quad (19)$$

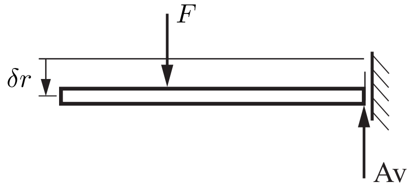
   Prinzip der virtuellen Verrückungen:

   $$\delta A = \underline{F}\cdot\delta\underline{r}_F + \underline{M}_E\cdot\delta\underline{\varphi} = 0 \quad (20)$$
   $$(\frac{2Fl}{3} - M_E)\delta\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{M_E = \frac{1}{3}q_0 l^2}} \quad (21)$$

2. Vertikalkraft der Einspannung:

   Zur Berechnung der Vertikalkraft A_V der Einspannung wird das System wie skizziert geändert, d.h. es wird eine Starrkörpertranslation in vertikaler Richtung möglich. Sowohl die Ersatzkraft für die

Querkraftschüttung als auch die vertikale Auflagerkraft verrichten an dieser fiktiven Verschiebung virtuelle Arbeit.



Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{F} \cdot \delta \underline{r} + \underline{A}_V \cdot \delta \underline{r} = 0 \qquad (22)$$

$$(-F + A_V)\delta r = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A_V = \frac{1}{2} q_0 l}} \qquad (23)$$

3. Horizontalkraft der Einspannung:

   Zur Berechnung der Vertikalkraft A_H wird in analoger Weise vorgegangen, nur das ein horizontaler Freiheitsgrad eingeführt wird. Der Kraftangriffspunkt der Resultierenden der Strechenlast verschiebt sich zwar, Kraft- und Verschiebungvektor stehen jedoch senkrecht aufeinander, so dass durch die Definition des Skalarproduktes keine virtuelle Arbeit verrichtet wird. Da die Horizontalkraft als einzige Kraft einen Beitrag zur virtuellen Arbeit leistet, muß sie Null sein.

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{A}_H \cdot \delta \underline{r}_H = 0 \qquad (24)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_H = 0}} \qquad (25)$$

HAUSAUFGABE

Aufgabe 4

(a) Die Ortsvektoren $\underline{r}_A$ und $\underline{r}_F$ vom drehbaren Festlager zu den Kraftangriffspunkten lauten:

$$\underline{r}_A = \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\sin(\varphi)\underline{e}_1 + \cos(\varphi)\underline{e}_2\right) \qquad (26)$$

$$\underline{r}_F = \frac{4}{3} a \left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2\right) \qquad (27)$$

- Die Variation ergibt sich dann zu:

$$\delta \underline{r}_A = \frac{\partial \underline{r}_A}{\partial \varphi}\delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2\right)\delta\varphi \qquad (28)$$

$$\delta \underline{r}_F = \frac{\partial \underline{r}_F}{\partial \varphi}\delta\varphi = \frac{4}{3} a \left(-\sin(\varphi)\underline{e}_1 - \cos(\varphi)\underline{e}_2\right)\delta\varphi \qquad (29)$$

- Berechnung der Lagerkraft A, mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = A\underline{e}_1 \cdot \delta \underline{r}_A|_{\varphi=0} + F\underline{e}_2 \cdot \delta \underline{r}_F|_{\varphi=0} \qquad (30)$$

$$= A\underline{e}_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\cos(0)\underline{e}_1 - \sin(0)\underline{e}_2\right)\delta\varphi \qquad (31)$$

$$+ F\underline{e}_2 \cdot \frac{4}{3} a \left(-\sin(0)\underline{e}_1 - \cos(0)\underline{e}_2\right)\delta\varphi \qquad (32)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} aA - \frac{4}{3} aF\right)\delta\varphi = 0 \qquad (33)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} F \qquad (34)$$

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{3} F = \frac{2}{\sqrt{3}} F \qquad (35)$$

(b) Gesucht ist der Ortsvektor $\underline{r}_F = \underline{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S.

$$\underline{r}_F = \frac{4}{3} a \left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2\right) \qquad (36)$$

$$\underline{r}_F = \underline{r}_S \qquad (37)$$

- Berechnung der Variationen $\delta \underline{r}_F$ und $\delta \underline{r}_F$

$$\delta \underline{r}_F = \delta \underline{r}_S = \frac{4}{3} a \left(-\sin(\varphi)\underline{e}_1 - \cos(\varphi)\underline{e}_2\right)\delta\varphi \qquad (38)$$

- Bestimmung der Stabkraft S mithilfe des PdvV:

Die Kraft S liegt in Richtung eines Vektors $\underline{e}_S$. Dieser Vektor läßt sich durch $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ folgendermaßen ausdrücken.

$$\underline{e}_S = \cos(\alpha)\underline{e}_2 - \sin(\alpha)\underline{e}_1 \qquad (39)$$

Da $\alpha = 30°$ wegen $\tan\alpha = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ergibt sich für $\underline{e}_S$:

$$\underline{e}_S = -\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2 \qquad (40)$$

Mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen folgt für S:

$$\underline{S} = S\underline{e}_S = S\left(-\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2\right) \qquad (41)$$

$$\delta W = F\underline{e}_2 \cdot \delta \underline{r}_F|_{\varphi=0} + \underline{S} \cdot \delta \underline{r}_S|_{\varphi=0} \qquad (42)$$

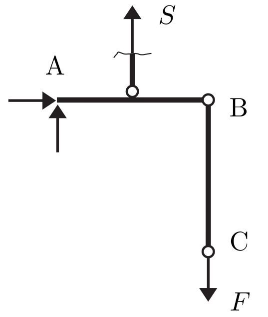
$$= \left(-\frac{4}{3} aF - \frac{4}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} S = 0\right)\delta\varphi \qquad (43)$$

$$\Rightarrow \quad S = -\frac{2}{\sqrt{3}} F \qquad (44)$$

Aufgabe 14

(a) Elementare Mechanik:

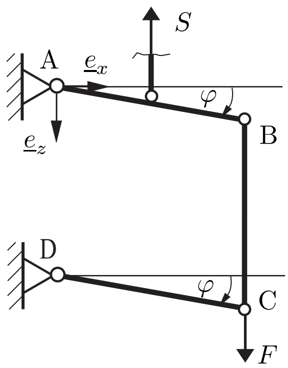
Zur Lösung der Aufgabe werden die Gleichgewichtsbedingungen genutzt. Zudem ist durch einen Knotenschnitt am Punkt C zu erkennen, daß es sich beim Stab CD um einen Nullstab handelt. Daher reicht der skizzierte Freischnitt, um mittels Momentengleichgewicht bezüglich des Punktes A auf die gesuchte Stabkraft S zu schließen.



$$\sum M^A = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = 2F}} \tag{45}$$

(b) Analytische Mechanik:

Zur Berechnung der Stabkraft wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen genutzt. Dabei wird zunächst die gesuchte Kraft durch einen Freischnitt sichtbar gemacht, wodurch das System einen Pseudofreiheitsgrad erhält. Nach einer gedachten Verschiebung (Drehung) werden die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten in der ausgelenkten Lage aufgestellt und anschließend um die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ variiert. Das Aufstellen der virtuellen Arbeit liefert die gesuchte unbekannte Stabkraft.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_S = \frac{l}{2}\cos\varphi\underline{e}_x + \frac{l}{2}\sin\varphi\underline{e}_z \tag{46}$$

$$\underline{r}_F = l\cos\varphi\underline{e}_x + (l + l\sin\varphi)\underline{e}_z \tag{47}$$

Variation:

$$\delta\underline{r}_S = -\left.\frac{l}{2}\sin\varphi\right|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + \left.\frac{l}{2}\cos\varphi\right|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z = \underline{\underline{\frac{l}{2}\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{48}$$

$$\delta\underline{r}_F = -\,l\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z = \underline{\underline{l\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{49}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{F}\cdot\delta\underline{r}_F + \underline{S}\cdot\delta\underline{r}_S = 0 \tag{50}$$

$$(Fl - \frac{Sl}{2})\delta\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = 2F}} \tag{51}$$