Lösungshinweis:
PLENARÜBUNG

Aufgabe 23

Das System hat 2 Freiheitsgrade, als generalisierte Koordinaten sollen

$$q_1 = r \qquad q_2 = \varphi \tag{1}$$

gewählt werden.

(a) (1) Kinematik

Es bietet sich die Wahl eines mitdrehenden Koordinatensystem im Punkt P an. Dann gilt allgemein

$$\underline{r} = r(t)\underline{e}_r \qquad \underline{\dot{r}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

und speziell für die Massenpunkte m_1 und m_2

$$v_1^2 = l^2\dot{\varphi}^2 \quad \text{bzw.} \quad v_2^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{3}$$

Alternativ lässt sich die Kinematik auch mittels eines festen, kartesischen Koordinatensystems im Punkt P (x nach rechts, y nach unten zeigend) beschreiben:

$$\begin{aligned}
\underline{r}_1 &= l\sin\varphi\underline{e}_x + l\cos\varphi\underline{e}_y \\
\underline{v}_1 &= l\dot{\varphi}\cos\varphi\underline{e}_x - l\dot{\varphi}\sin\varphi\underline{e}_y \\
v_1^2 &= l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi \\
&= l^2\dot{\varphi}^2, \quad \text{sowie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{r}_2 &= r\sin\varphi\underline{e}_x + r\cos\varphi\underline{e}_y \\
\underline{v}_2 &= (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\underline{e}_x + (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\underline{e}_y \\
v_2^2 &= (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 \\
&= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

(2) Energiebetrachtung

Die kinetische Energie beträgt

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)
\end{aligned} \tag{4}$$

und die potentielle Energie bei Wahl des Nullniveaus durch den Punkt P

$$U = -m_1gl\cos\varphi - m_2gr\cos\varphi + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2. \tag{5}$$

Damit lautet die Lagrange Funktion:

$$L = T - U \tag{6}$$

$$L = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \tag{7}$$

$$+ m_1gl\cos\varphi + m_2gr\cos\varphi - \frac{1}{2}k(r-l_0)^2. \tag{8}$$

(3) Die Lagrangegleichungen 2. Art für konservative Systeme sind

$$L = L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{10}$$

Mit den Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_2\dot{r} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_2\ddot{r} \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m_2r\dot{\varphi}^2 + m_2g\cos\varphi - k(r-l_0) \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1l^2\dot{\varphi} + m_2r^2\dot{\varphi} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1l^2\ddot{\varphi} + m_2r^2\ddot{\varphi} + m_2\dot{\varphi}2r\dot{r} \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_1gl\sin\varphi - m_2gr\sin\varphi \tag{15}$$

folgen aus (10) die gesuchten Bewegungsdifferentialgleichungen:

$$m_2\ddot{r} - m_2r\dot{\varphi}^2 - m_2g\cos\varphi + k(r-l_0) = 0 \tag{16}$$

$$(m_1l^2 + m_2r^2)\ddot{\varphi} + 2m_2r\dot{r}\dot{\varphi} + (m_1l + m_2r)g\sin\varphi = 0. \tag{17}$$

(b) Es werden drei Grenzfälle betrachtet:

(1) $r = l = const, \quad \dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0$
In diesem Fall ist r keine unabhängige Koordinate mehr. Das System hat nur noch einen Freiheitsgrad und Gleichung (16) entfällt. (17) vereinfacht sich zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \tag{18}$$

der Gleichung für das mathematisches Pendel.
(2) $\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0$
In diesem Fall ist φ keine unabhängige Koordinate mehr. Das System hat nur noch einen Freiheitsgrad und Gleichung (17) entfällt. (16) vereinfacht sich zu

$$\ddot{r} + \frac{k}{m_2}r = g + \frac{k}{m_2}l_0, \tag{19}$$

der Gleichung für einen 1-Massen-Schwinger im Gravitationsfeld.
(3) Gleichgewichtslagen ($\dot{\varphi} = 0,\ \ddot{\varphi} = 0,\ \dot{r} = 0,\ \ddot{r} = 0$)
Dann vereinfachen sich (16) und (17) zu

$$m_2g\cos\varphi - k(r-l_0) = 0 \tag{20}$$

$$(m_1l + m_2r)g\sin\varphi = 0 \tag{21}$$

Dabei muss gelten $\varphi \in [0, 2\pi[$ und $r \in]0, l]$. Aus (21) erhält man unmittelbar die Lösungen

$$\varphi_{s,1} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{s,2} = \pi \tag{22}$$

Die zugehörigen Werte für r sind gemäß (20):

$$r_{s,1} = l_0 + \frac{m_2 g}{k} \quad \text{bzw.} \quad r_{s,2} = l_0 - \frac{m_2 g}{k}. \tag{23}$$

Diese Gleichgewichtslagen sind sinnvoll und entsprechen den Erwartungen.