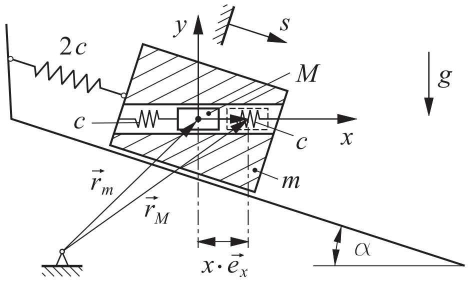
Lösungshinweis:
TUTORIUM

Aufgabe 18



1. Ortsvektoren und Kinematik

$$\underline{r}_m = \underline{r}_0 + s\cos\alpha\underline{e}_x - s\sin\alpha\underline{e}_y \quad (1)$$
$$\left|\underline{\dot{r}}_m\right|^2 = \dot{s}^2 \quad (2)$$
$$\underline{r}_M = \underline{r}_m + x\underline{e}_x \quad (3)$$
$$= (x + s\cos\alpha)\underline{e}_x - s\sin\alpha\underline{e}_y \quad (4)$$
$$\left|\underline{\dot{r}}_M\right|^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\,\dot{x}\dot{s}\cos\alpha \quad (5)$$

Dabei ist $\underline{r}_0$ der Vektor vom beliebigen, festen Punkt zum Schwerpunkt des Systems in der Ausgangslage.

2. Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m\left|\underline{\dot{r}}_m\right|^2 + \frac{1}{2}M\left|\underline{\dot{r}}_M\right|^2 \quad (6)$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{s}^2\right) + M\dot{x}\dot{s}\cos\alpha \quad (7)$$

3. Potentielle Energie:

$$U = -(M+m)gs\sin\alpha + \frac{1}{2}2c\cdot s^2 + \frac{1}{2}2c\cdot x^2 \quad (8)$$

4. Lagrangesche Funktion:
(Generalisierte Koordinaten: s und x)

$$L = T - U \quad (9)$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{s}^2\right) + M\dot{x}\dot{s}\cos\alpha$$
$$+ \underbrace{(M+m)}_{=:\,m_{\text{ges}}}gs\sin\alpha - c\left(s^2 + x^2\right) \quad (10)$$

5. Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m_{\text{ges}}\dot{s} + M\dot{x}\cos\alpha \quad (11)$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\Big) = m_{\text{ges}}\ddot{s} + M\ddot{x}\cos\alpha \quad (12)$$
$$\frac{\partial L}{\partial s} = m_{\text{ges}}g\sin\alpha - 2cs \quad (13)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + M\dot{s}\cos\alpha \quad (14)$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = M\ddot{x} + M\ddot{s}\cos\alpha \quad (15)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx \quad (16)$$

6. Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\Big) = Q_i \qquad i = 1,2 \quad (17)$$

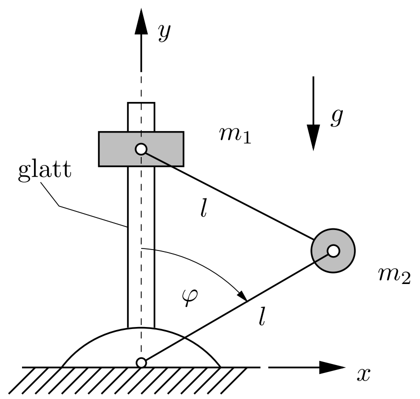
Ausgewertet ergibt das für $i = 1$ mit $q_1 = s$:

$$m_{\text{ges}}\ddot{s} + 2cs + M\cos\alpha\ddot{x} \;=\; m_{\text{ges}}g\sin\alpha \quad (18)$$

und für $i = 2$ mit $q_2 = x$:

$$M\cdot\ddot{x} + 2cx + M\cos\alpha\ddot{s} \;=\; 0. \quad (19)$$

Aufgabe 22



(a) Das System hat den Freiheitsgrad 1. Zur Beschreibung des Systems reicht somit eine generalisierte Koordinate. Im Folgenden wird der Winkel φ verwendet.

(b) Seien x_1, y_1 die Schwerpunkts-Koordinaten des starren Körpers und x_2, y_2 die Koordinaten der Punktmasse im eingezeichneten Koordinatensystem. Dann gilt für die potentielle Energie

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2, \quad (20)$$

wobei das Nullniveau bei $y = 0$ gewählt wurde. Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \quad . \quad (21)$$

Die Lagrangefunktion $L = T - U$ nimmt damit die Gestalt

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) - m_1gy_1 - m_2gy_2 \quad (22)$$

an. Mit den kinematischen Beziehungen

$$y_1 = 2l\cos\varphi \quad (23)$$
$$y_2 = l\cos\varphi \quad (24)$$
$$x_2 = l\sin\varphi \quad (25)$$

überführt man die Lagrangefunktion in die Form

$$L = 2m_1l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 - (2m_1 + m_2)gl\cos\varphi. \quad (26)$$

Die (einzige) Lagrangesche Gleichung 2. Art lautet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \tag{27}$$

Die Ableitungen sind

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 4m_1 l^2 \dot\varphi \sin^2\varphi + m_2 l^2 \dot\varphi \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 4m_1 l^2 \ddot\varphi \sin^2\varphi + 8m_1 l^2 \dot\varphi^2 \sin\varphi\cos\varphi + m_2 l^2 \ddot\varphi \tag{29}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 4m_1 l^2 \dot\varphi^2 \sin\varphi\cos\varphi + (2m_1+m_2) g l \sin\varphi \tag{30}$$

Durch Einsetzen von (29) und (30) in (27) ergibt sich die gesuchte Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 4m_1 l^2 \left(\ddot\varphi \sin^2\varphi + \dot\varphi^2 \sin\varphi\cos\varphi\right) + \\ &\quad + m_2 l^2 \ddot\varphi - (2m_1+m_2) g l \sin\varphi. \end{aligned} \tag{31}$$

HAUSAUFGABE

Aufgabe 17

a) Das Nullniveau für die potentielle Energie liege bei $y = 0$.

$$U = -g m_1 y_1 - g m_2 y_2 \tag{32}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot x_1^2 + \dot y_1^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot x_2^2 + \dot y_2^2\right) \tag{33}$$

Kinematische Beziehungen: Drücke die in (32) und (33) vorkommenden kinematischen Größen aus als Funktion der beiden (willkürlich gewählten) generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2. (System hat 2 Freiheitsgrade)

$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \qquad \dot y_1 = -\dot\varphi_1\, l_1 \sin\varphi_1 \tag{34}$$

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \qquad \dot x_1 = \dot\varphi_1\, l_1 \cos\varphi_1 \tag{35}$$

$$y_2 = y_1 + l_2 \cos\varphi_2 \qquad \dot y_2 = \dot y_1 - \dot\varphi_2\, l_2 \sin\varphi_2 \tag{36}$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin\varphi_2 \qquad \dot x_2 = \dot x_1 + \dot\varphi_2\, l_2 \cos\varphi_2 \tag{37}$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich damit zu:

$$L = T - U \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot\varphi_1^2 \left(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \Big[\dot\varphi_1^2 l_1^2 + \dot\varphi_2^2 l_2^2 + 2\dot\varphi_1 l_1 \dot\varphi_2 l_2 \\ &\qquad \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)\Big] \\ &\quad + g(m_1+m_2) l_1 \cos\varphi_1 + g m_2 l_2 \cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{39}$$

mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1+m_2) l_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot\varphi_2^2 \\ &\quad + m_2 \dot\varphi_1 l_1 \dot\varphi_2 l_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ &\quad + g(m_1+m_2) l_1 \cos\varphi_1 + g m_2 l_2 \cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{40}$$

Für die Lagrangeschen Gleichung 2.Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0, \qquad i = 1,2 \tag{41}$$

benötigen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) \\ &\quad - g(m_1+m_2) l_1 \sin\varphi_1 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) - g m_2 l_2 \sin\varphi_2 \tag{43}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = (m_1+m_2) l_1^2 \dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1}\right) &= (m_1+m_2) l_1^2 \ddot\varphi_1 \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \Big[\ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ &\qquad - (\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2)\dot\varphi_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big] \end{aligned} \tag{45}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = m_2 l_2^2 \dot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2}\right) &= m_2 l_2^2 \ddot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \Big[\ddot\varphi_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ &\qquad - \dot\varphi_1 (\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) \sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big] \end{aligned} \tag{47}$$

eingesetzt in (41) erhalten wir die beiden Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} l_1 \ddot\varphi_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} l_2 \Big[\ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + \dot\varphi_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big] \\ + g \sin\varphi_1 = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} l_2 \ddot\varphi_2 + l_1 \Big[\ddot\varphi_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - \dot\varphi_1^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big] \\ + g \sin\varphi_2 = 0 \end{aligned} \tag{49}$$

b)

$$\text{Gleichgewicht :} \quad \dot\varphi_{i,G} = 0, \quad \ddot\varphi_{i,G} = 0 \tag{50}$$

$$\text{aus (48):} \quad g \sin\varphi_{1,G} = 0 \tag{51}$$

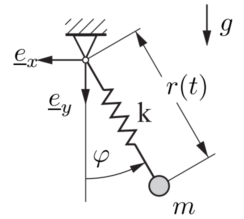
$$\text{aus (49):} \quad g \sin\varphi_{2,G} = 0 \tag{52}$$

$$\varphi_{1,G} = k\pi, \quad k = 0,1,2... \tag{53}$$

$$\varphi_{2,G} = m\pi, \quad m = 0,1,2... \tag{54}$$

Gleichgewicht herrscht, wenn jedes Pendel entweder genau senkrecht hängt oder genau senkrecht nach oben steht.

Aufgabe 19



Kinetische Energie:

$$E = \frac{1}{2}m\big(\underline{v}\cdot\underline{v}\big) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{55}$$

$$\text{mit}\quad \underline{v}\cdot\underline{v} = |\underline{v}|\underline{e}_v\cdot|\underline{v}|\underline{e}_v = |\underline{v}|^2 = v^2 \tag{56}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgr(t)\cos\varphi(t) + \frac{1}{2}k\big(r(t)-r_0\big)^2 \tag{57}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = E - U = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2}k\big(r-r_0\big)^2 \tag{58}$$

Kinematik:

$$\underline{r} = -r(t)\sin\varphi(t)\underline{e}_x + r(t)\cos\varphi(t)\underline{e}_y \tag{59}$$

$$\begin{aligned}\underline{v} =& -\dot{r}(t)\sin\varphi(t)\underline{e}_x - r(t)\cos\varphi(t)\dot{\varphi}(t)\underline{e}_x\\ &+\dot{r}(t)\cos\varphi(t)\underline{e}_y - r(t)\sin\varphi(t)\dot{\varphi}(t)\underline{e}_y\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow v^2 \equiv \underline{v}\cdot\underline{v} &= \dot{r}^2 + 2\dot{r}r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2\\ &\quad - 2\dot{r}r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}\\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\end{aligned} \tag{61}$$

alternativ:

Darstellung über ursprungsfestes mitdrehendes Koordinatensystem

$$\underline{r} = r(t)\underline{e}_r \tag{62}$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \tag{63}$$

$$\Rightarrow \underline{v}\cdot\underline{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{64}$$

Kinematik in der Lagrangefunktion berücksichtigen:

$$\Rightarrow\ L = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\big) + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2}k\big(r-r_0\big)^2 \tag{65}$$

Lagrange - Gleichungen 2. Art ansetzen:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{66}$$

Es treten nur konservative Kräfte auf.

Das System besitzt 2 Freiheitsgrade, somit existieren 2 generalisierte Koordinaten. Diese wurden hier so gewählt:

$$q_1 = r \tag{67}$$

$$q_2 = \varphi \tag{68}$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \tag{69}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - k\big(r-r_0\big) \tag{70}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} \tag{71}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgr\sin\varphi \tag{72}$$

Bewegungsdifferentialgleichungssystem

$$\Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + k\big(r-r_0\big) = 0 \tag{73}$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \tag{74}$$