4. Übung: Lagerreaktionen, statische Bestimmtheit

1) Statische Bestimmtheit

Ein System heißt statisch bestimmt, wenn sich alle LR allein aus GGBen bestimmen lassen!

- notwendige Bedingung: $n = 0$ mit $n = f - r - v$

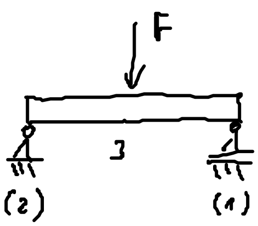
  f: Anzahl der FHG

  r: Anzahl LR

  v: Anzahl innerer Bindungen

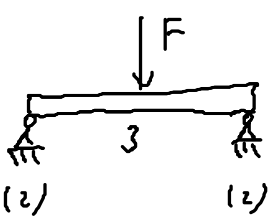
- hinreichende Bedingung: nicht wackelig / vorspannbar

a)



$n = 3 - 2 - 1 - 0 = 0$

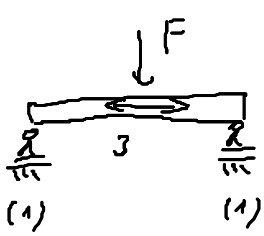
b)



$n = 3 - 2 - 2 - 0 = -1$

$\Rightarrow$ statisch unbestimmt

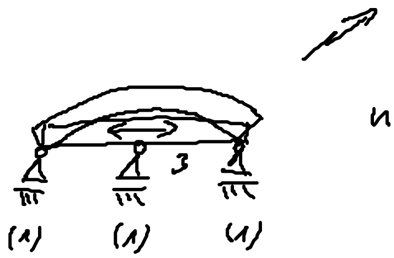
c)



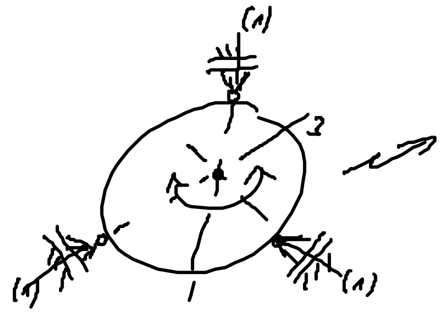
$n = 3 - 1 - 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow$ kinematisch unbestimmt

1) Sonderfälle



$n = 0$

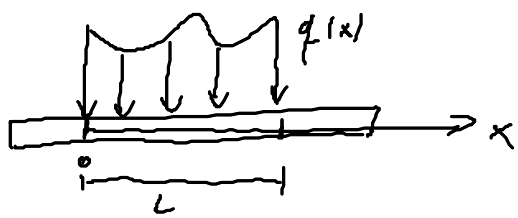


$\Sigma M = 0$

Ist nicht erfüllt!

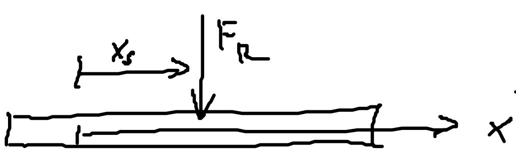
2) Streckenlast (SL)

$$[q(x)] = \frac{N}{m}$$



$$x_s = \frac{\int_0^L x\,q(x)\,dx}{\int_0^L q(x)\,dx}$$ – SP der SL

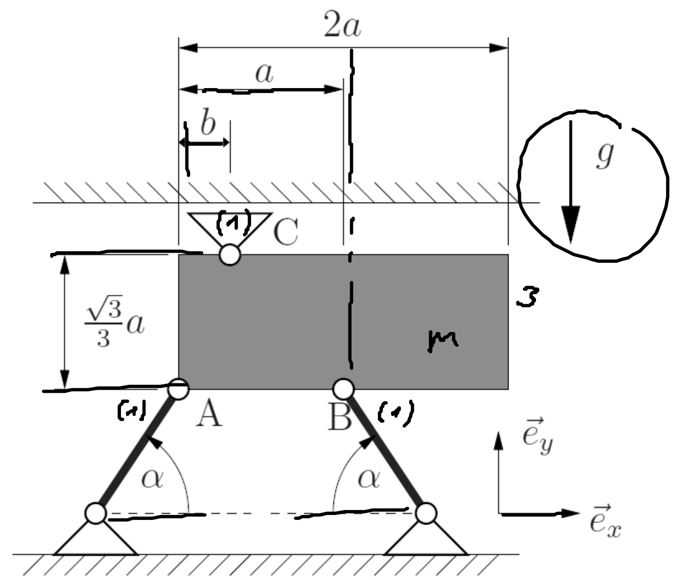
$$F_R = \int_0^L q(x)\,dx$$ – Resultierende der SL



– Ersatzsystem mit F_R

A39

39 . Eine homogene Scheibe (Masse m) ist wie abgebildet über zwei Pendelstützen und ein Loslager gelagert.



(a) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen, d.h. die Kräfte in den Pendelstützen und die Kraft im Loslager C.

(b) Skizzieren Sie die Kraft im Lager C als Funktion der Länge b, wobei $0 < b < 2a$.

Geg.: a, b, g, m, $\alpha = 30°$

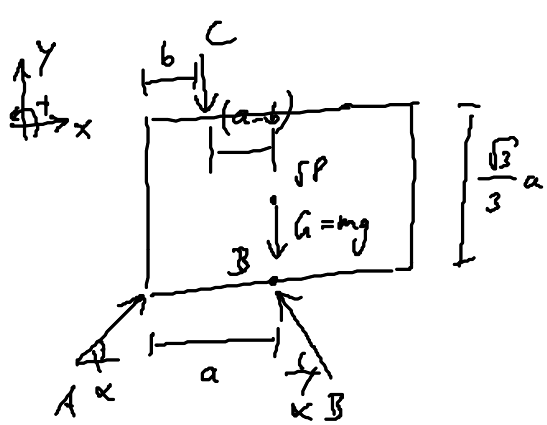
a) Ist System statisch bestimmt?

• notwendige Bed: $n = f - r - v = 0$

$n = 3 - 1 - 1 - 1 = 0$ ✓

• auf den ersten Blick ist System nicht wackelig o. verspannbar!

1) FS:



2) GGB aufstellen:

$$x: \quad 0 = \underline{A}\cos(\alpha) - \underline{B}\cos(\alpha) \qquad (1)$$

$$y: \quad 0 = A\sin(\alpha) + B\sin(\alpha) - \underline{C} - G \qquad (2)$$

$$M^B: \quad 0 = C(a-b) - A\sin(\alpha)\, a \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha = 30°) = \frac{1}{2}, \quad \cos(\alpha = 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) Auflösen:

$$(1): \quad A\cancel{\cos(\alpha)} = B\cancel{\cos(\alpha)} \implies A = B$$

$$(3): \quad C(a-b) = A\sin(\alpha)\, a \implies C = \frac{a}{a-b}\sin(\alpha)\, A = \frac{a}{2(a-b)} A$$

$$(2): \quad A \underbrace{\cancel{\sin(\alpha)}}_{\frac{1}{2}} + A \underbrace{\cancel{\sin(\alpha)}}_{\frac{1}{2}} - A \frac{a}{2(a-b)} = G$$

$$A - A \frac{a}{2(a-b)} = G$$

$$A \left(1 - \frac{a}{2(a-b)}\right) = G$$

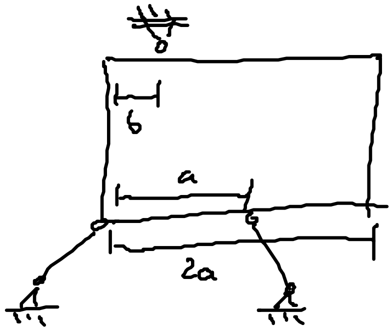
$$A = \frac{G}{1 - \frac{a}{2(a-b)}} \underbrace{\frac{2(a-b)}{2(a-b)}}_{=1} = G \frac{2(a-b)}{2(a-b) - a} = G \underbrace{\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}}_{=1} \frac{2(1-\frac{b}{a})}{2(1-\frac{b}{a})-1}$$

$$A = mg \frac{2(1-\frac{b}{a})}{2(1-\frac{b}{a})-1}, \quad B = mg \frac{2(1-\frac{b}{a})}{2(1-\frac{b}{a})-1}$$

$$C = \underbrace{\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}}_{=1} \frac{\cancel{a}\,1}{2(\underbrace{\cancel{a}}_{1} - \underbrace{b}_{\frac{b}{a}})} mg \frac{2(1-\frac{b}{a})}{2(1-\frac{b}{a})-1} = mg \frac{1}{\cancel{2(1-\frac{b}{a})}} \frac{\cancel{2(1-\frac{b}{a})}}{2(1-\frac{b}{a})-1}$$

$$C = mg \frac{1}{\underbrace{\cancel{2}}_{1} - 2\frac{b}{a} - \cancel{1}} = mg \frac{1}{1 - 2\frac{b}{a}}$$

b) Verlauf von C als Funktion von b

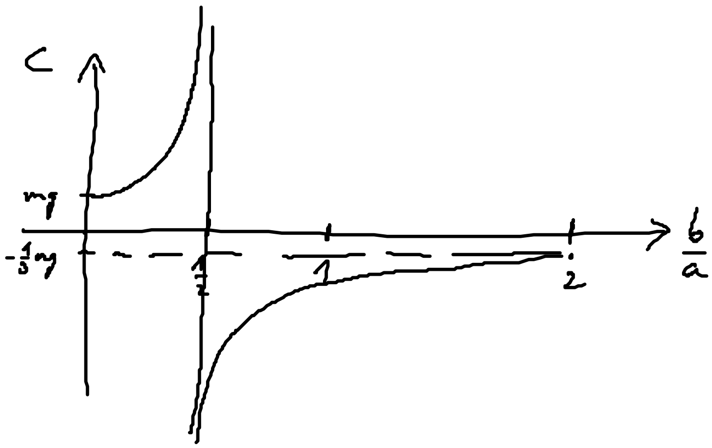


$C = mg \frac{1}{1-2\frac{b}{a}}$; mit $0 \le \frac{b}{a} \le 2$

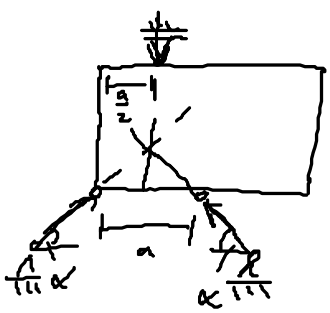
$C\left(\frac{b}{a}=0\right) = mg \frac{1}{1-0} = mg$

$C\left(\frac{b}{a}=2\right) = mg \frac{1}{1-2\cdot 2} = -\frac{1}{3} mg$

$C\left(\frac{b}{a} \to \frac{1}{2}\right) = mg \frac{1}{1-2\cdot \frac{1}{2}}$



Sei $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Longrightarrow b = \frac{1}{2} a$



$\Rightarrow$ Alle Kräfte treffen sich in einem Punkt

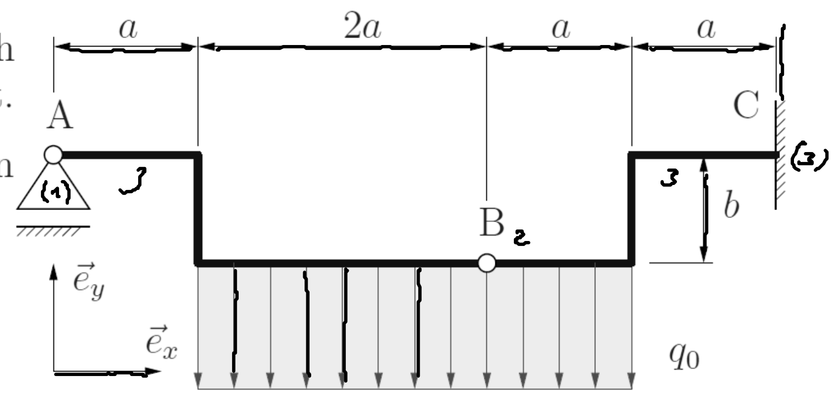
$\Rightarrow$ $\Sigma M = 0$ nicht erfüllt! (kein Gleichgewicht!)

Aufgabe 42

42. Das abgebildete Tragwerk wird durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet.

Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Lagern A und C.

Geg.: a, b, q_0

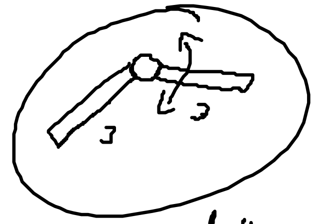


statisch bestimmt ? 1) $n = f - r - v \stackrel{!}{=} 0$

Gelenk :

$n = 3+3-1-3-2 = 0$ ✓

2) nicht wackelig / verspannbar ✓



$2 \cdot 3 = 6$

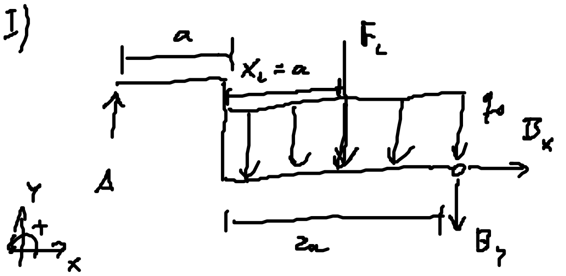
$6 - v = 4$

$f = 4$

$\Rightarrow v = 2$

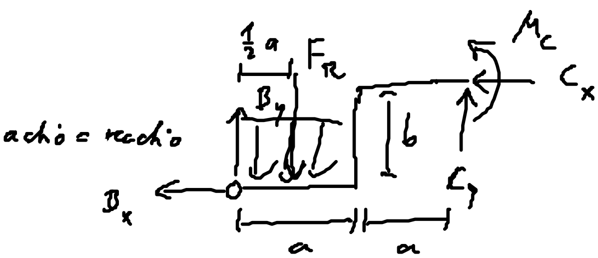
1.) FS: $LR = 4 \Rightarrow$ 2 Freischnitte notwendig, 2 Teilstücke

I)



Resultierende: $F_L = \int_0^{2a} q(x)\,dx = \int_0^{2a} q_0\,dx = 2aq_0$

II)



$F_R = \int_0^a q_0\,dx = aq_0$

2.) GGB, für die Teilsysteme (jedes ist im Gleichgewicht)

I) $x: \quad 0 = B_x \qquad \Rightarrow B_x = 0$

$y: \quad 0 = A - F_L - B_y \qquad \Rightarrow B_y = A - F_L = \frac{2}{3} q_0 a - \underbrace{\cancel{2} q_0 a}_{\frac{6}{3}} = -\frac{4}{3} q_0 a$

$M^B: \quad 0 = F_L \cdot a - A \cdot 3a \qquad \Rightarrow A = \frac{1}{3} F_L = \frac{1}{3} \cdot 2aq_0 = \frac{2}{3} q_0 a$

II) $x: \quad 0 = -B_x - C_x \qquad \Rightarrow C_x = -B_x = 0$

$y: \quad 0 = B_y - F_R + C_y \qquad \Rightarrow C_y = F_R - B_y = \frac{3}{3} q_0 a - \left(-\frac{4}{3} q_0 a\right) = \frac{7}{3} q_0 a$

$M^c: \quad 0 = -\underbrace{B_x}_{=0} b - B_y \cdot 2a + F_R \left(a + \frac{1}{2}a\right) + M_c$

$\Rightarrow M_c = B_y \cdot 2a - F_R \frac{3}{2} a = -\frac{4}{3} q_0 a \cdot 2a - q_0 a \frac{3}{2} a$

$$= q_0 a^2 \left(-\frac{8}{3} - \frac{3}{2}\right) = -q_0 a^2 \frac{1}{6}(16 + 9)$$

$$M_c = -q_0 a^2 \frac{25}{6}$$

$$\frac{N}{m} \quad m^2 = Nm$$

Tut: 32, 34, 36, Ha: 33, 40, 43