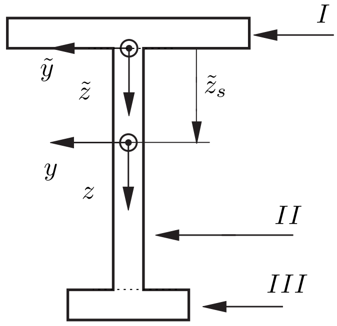
# Tutorium

## Aufgabe T1

Anzuwendende Formel:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y + \frac{N}{A} \tag{1}$$

1. Ermittlung Flächenträgheitsmoment $I_{yy}$




Der Körper wird in drei Teilkörper zerlegt. Das Trägheitsmoment ergibt sich dann aus

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{3} \left[ I^*_{yyi} + (\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_s)^2 A_i \right]. \tag{2}$$

Diese Formel wird mittels Tabellenverfahren ausgewertet ($\tilde{z}_s = s = (4h - t)/10$ aus der Aufgabenstellung bekannt):

| TK | $A_i$ | $\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_s$ | $(\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_s)^2 A_i$ | $I^*_{yyi}$ |
|---|---|---|---|---|
| I | $ht$ | $-\frac{2}{5}(h+t)$ | $\frac{4}{25}(h+t)^2 ht$ | $\frac{1}{12}ht^3$ |
| II | $ht$ | $\frac{1}{10}(h+t)$ | $\frac{1}{100}(h+t)^2 ht$ | $\frac{1}{12}th^3$ |
| III | $\frac{1}{2}ht$ | $\frac{3}{5}(h+t)$ | $\frac{9}{50}(h+t)^2 ht$ | $\frac{1}{24}ht^3$ |
| $\sum$ | | | $\frac{7}{20}(h+t)^2 ht$ | $\frac{ht}{12}(\frac{3}{2}t^2 + h^2)$ |

$$I_{yy} = \frac{ht}{20}\left(\frac{26}{3}h^2 + 14ht + \frac{19}{2}t^2\right) \approx 508\ cm^4. \tag{3}$$

2. Extremwertsuche

Um die maximale Spannung zu finden setzen wir die gegebenen Schnittlasten in Gleichung (1) ein:

$$\sigma(x,z) = \frac{q_0 z}{2I_{yy}}(x\ell - x^2) + \frac{N_0}{A\ell}x. \tag{4}$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Gleichung in $z$. Damit befinden sich die Extremwerte bei $z_{oben}$ und $z_{unten}$ (Randfaserabstand). In $x$ haben wir es stattdessen mit einem quadratischen Polynom zu tun, dass im Intervall $0 < x < \ell$ oder an dessen Rand extremal wird. Zu null setzen der ersten Ableitung liefert:

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0 \rightarrow \frac{q_0 z}{2I_{yy}}(\ell - 2\hat{x}) + \frac{N_0}{A\ell} = 0 \tag{5}$$

$$\rightarrow \hat{x} = \frac{I_{yy}}{Az}\frac{N_0}{q_0 \ell} + \frac{\ell}{2}. \tag{6}$$

3. Zahlenwerte einsetzen

Mit den gegebenen Werten berechnen wir für die obere Randfaser:

$$z_{oben} = -(\tilde{z}_s + t) \approx -4,9\ cm \tag{7}$$
$$\hat{x}_{oben} \approx 348\ cm \tag{8}$$
$$\hat{\sigma}_{oben} \approx -58\ N/mm^2 \ \text{(Druck)} \tag{9}$$

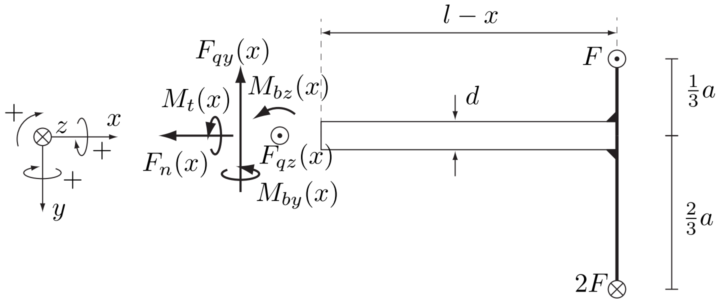
und untere Randfaser:

$$z_{unten} = (h+t) - \tilde{z}_s \approx 7,1\ cm \tag{10}$$
$$\hat{x}_{unten} \approx 436\ cm \tag{11}$$
$$\hat{\sigma}_{unten} \approx 133\ N/mm^2 \ \text{(Zug).} \tag{12}$$

---

## Aufgabe T2

**(a)** Freischnitt:




$$\sum F_x = F_n(x) = 0 \tag{13}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{F_n(x) = 0} \tag{14}$$

$$\sum F_y = -F_{qy}(x) = 0 \tag{15}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{F_{qy}(x) = 0} \tag{16}$$

$$\sum F_z = -F_{qz}(x) + 2F - F = 0 \tag{17}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{F_{qz}(x) = F} \tag{18}$$

$$\sum M_x^S = -M_t(x) + F\frac{a}{3} + F\frac{4a}{3} = 0 \tag{19}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{M_t(x) = F\frac{5}{3}a} \tag{20}$$

$$\sum M_{by}^S = -M_{by}(x) - 2F(l-x) + F(l-x) = 0 \tag{21}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{M_{by}(x) = -F(l-x)} \tag{22}$$

$$\sum M_{bz}^S = -M_{bz}(x) = 0 \tag{23}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{M_{bz}(x) = 0} \tag{24}$$

**(b)**

$$w''(x) = -\frac{M_{by}(x)}{EI_y(x)} = \frac{F(l-x)}{EI_y(x)} \tag{25}$$

$$I_y(x) = \frac{\pi}{4}r^4 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{64}d^4 = \text{konst.} \tag{26}$$

$$\Rightarrow w''(x) = \frac{64F}{E\pi d^4}(l-x) \qquad \Big|\int \tag{27}$$

$$\Rightarrow w'(x) = \frac{64F}{E\pi d^4}\left(lx - \frac{x^2}{2} + C_1\right) \qquad \Big|\int \tag{28}$$

$$\Rightarrow w(x) = \frac{64F}{E\pi d^4}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right) \tag{29}$$

Bestimmen der Konstanten aus den Randbedingungen für die Durchbiegung $w$:
$\rightarrow$ Einspannung:

$$w(x=0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0 \tag{30}$$

$$w'(x=0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0 \tag{31}$$

$$w(x) = \frac{64F}{E\pi d^4}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right) \tag{32}$$

$$w(x=l) = \frac{64F}{E\pi d^4}\left(\frac{3-1}{6}l^3\right) \tag{33}$$

$$= \underline{\frac{64F}{3E\pi d^4}l^3} \tag{34}$$

**(c)** Das Materialstrukturgesetz für die Torsion lautet:

$$\varphi'(x) = \frac{M_t(x)}{GI_T(x)} \tag{35}$$

$$\text{mit } I_T \overset{\text{Kreis-QS}}{=} I_p = \frac{\pi}{32}d^4 \tag{36}$$

$$= \frac{F\frac{5}{3}a}{G\frac{\pi}{32}d^4} \tag{37}$$

$$\varphi'(x) = \frac{160Fa}{3d^4G\pi} \qquad \Big|\int \tag{38}$$

$$\varphi(x) = \frac{160Fa}{3d^4G\pi}x + C_1 \tag{39}$$

Bestimmen der Konstanten durch die Randbedingungen für den Verdrehwinkel $\varphi$:

$$\rightarrow \quad \varphi(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \tag{40}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{160Fa}{3d^4G\pi}x \tag{41}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x=l) = \frac{160Fa}{3d^4G\pi}l \tag{42}$$

**(d)** Für die Absenkung $w_A$ des Punkts A folgt durch geometrisches Linearisieren:

$$w_A = w(x=l) + \frac{2}{3}a\sin(\varphi)(x=l) \tag{43}$$

$$\approx w(x=l) + \frac{2}{3}a\,\varphi(x=l) \tag{44}$$

$$= \frac{64F}{3E\pi d^4}l^3 + \frac{2}{3}\frac{160Fa^2}{3d^4G\pi}l \tag{45}$$

$$= \frac{F}{\pi d^4}\left(\frac{64l^3}{3E} + \frac{320a^2l}{9G}\right) \tag{46}$$

---

## Aufgabe T3

**(a)**

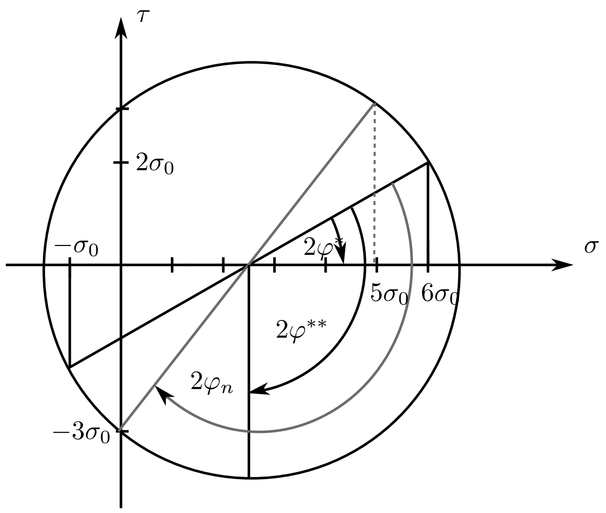
$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{47}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{65}}{2}\sigma_0 \tag{48}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{max} \tag{49}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{65}}{2}\sigma_0 \tag{50}$$

**(b)**




$\varphi^* \approx 15°$ $\qquad \varphi^{**} \approx 60°$

**(c)**

$\varphi_n \approx 80°$

$\tau_{\xi\eta} \approx -3\sigma_0$

$\sigma_\eta \approx 5\sigma_0$