Tutorium

Aufgabe 115

Für das Querverformungsproblem (Biegelinie):

x	w	w'	M	Q
0	$w_I = 0$	–	$M_I = -c_M w_I'$	–
l	$w_I = w_{II}$	$w_I' = w_{II}'$	$M_I = M_{II} + M_0$	$Q_I = Q_{II}$
$2l$	$w_{II} = w_{III}$	–	$M_{II} = 0$ $M_{III} = 0$	$Q_{II} = Q_{III}$
$3l$	$w_{III} = 0$ $w_{IV} = 0$	$w_{III}' = w_{IV}'$	$M_{III} = M_{IV}$	–
$4l$	$w_{IV} = 0$	$w_{IV}' = 0$	–	–

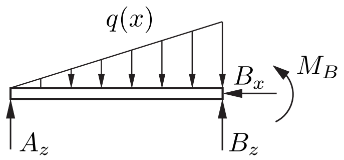
Die Integration der Biegeliniendifferentialgleichung

$$(EIw'')''(x) = q(x) \tag{1}$$

für die vier Bereiche I bis IV führt auf insgesamt 16 Integrationskonstanten. Diese lassen sich mit den oben angegebenen 16 Rand- und Übergangsbedingungen bestimmen.

Aufgabe 111

(a) statische Bestimmtheit?



Die vier unbekannten A_z, B_z, B_x, M_B der Lagerreaktionen können aus den drei Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene nicht bestimmt werden. Das System ist statisch unbestimmt.

(b) Integration der Biegeliniendifferentialgleichung:

$$\big(EI\,w''\big)''(x) = q(x) = \frac{q_0}{l}\,x \tag{2}$$

$$\big(EI\,w''\big)'(x) = -Q(x) = \frac{q_0 l}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_1 \tag{3}$$

$$EI\,w''(x) = -M(x) = \frac{q_0 l^2}{6}\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + C_1 l\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_2 \tag{4}$$

$$EI\,w'(x) = \frac{q_0 l^3}{24}\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 + \frac{C_1 l^2}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_2 l\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_3 \tag{5}$$

$$EI\,w\,(x) = \frac{q_0 l^4}{120}\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + \frac{C_1 l^3}{6}\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \frac{C_2 l^2}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_3 l\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_4 \tag{6}$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$$w\,(x=0) = 0 \tag{7}$$

$$w\,(x=l) = 0 \tag{8}$$

$$M(x=0) = 0 \tag{9}$$

$$w'\,(x=l) = 0 \tag{10}$$

$$\text{Gl. (7) in (6)}: \quad C_4 = 0 \tag{11}$$

$$\text{Gl. (9) in (4)}: \quad C_2 = 0 \tag{12}$$

$$\text{Gl. (10) in (5)}: \quad C_3 = -q_0\frac{l^3}{24} - C_1\frac{l^2}{2} \tag{13}$$

$$\text{Gl. (8) in (6)}: \quad 0 = \frac{q_0 l^4}{120} + C_1\frac{l^3}{6} + C_3 l \tag{14}$$

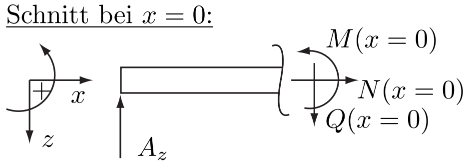
mit (13) ergibt sich:

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{10} \tag{15}$$

$$C_3 = \frac{q_0 l^3}{120} \tag{16}$$

Auflagerreaktion in A:

Schnitt bei $x = 0$:



$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q(x=0)$$

$$A_z = Q(x=0) \tag{17}$$

aus Gl. (3):

$$Q(x) = -(EIw'')'(x) = -\frac{q_0 l}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - C_1$$

mit Gl. (15) und (17):

$$Q(x=0) = A_z = \frac{q_0 l}{10} \tag{18}$$

(c) Biegelinie bestimmen:
Gleichungen (11), (12), (15) und (16) in (6):

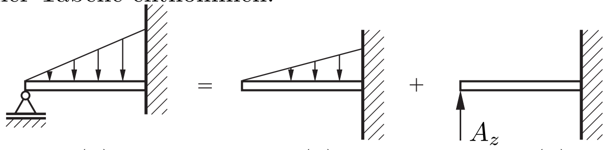
$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{120\,EI}\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 - 2\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{19}$$

(d) Verdrehwinkel φ_A in A:

$$w'(x) = \frac{q_0 l^3}{120\,EI}\Big[5\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - 6\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + 1\Big] \tag{20}$$

$$\varphi_A = w'(x=0) = \frac{q_0 l^3}{120\,EI} \tag{21}$$

Alternativ kann die Lösung auch mit dem Superpositionsprinzip erfolgen. Die Biegelinien der Teilsysteme werden einer Tabelle entnommen.



$$w(x) \quad = \quad w_{\mathrm{I}}(x) \quad + \quad w_{\mathrm{II}}(x)$$

aus Dubbel:

$$w_{\mathrm{I}}(x) = \frac{q_0 l^4}{120\,EI}\Big[4 - 5\frac{x}{l} + \Big(\frac{x}{l}\Big)^5\Big] \tag{22}$$

$$w_{\mathrm{II}}(x) = \frac{(-A_z)\,l^3}{6\,EI}\Big[2 - 3\frac{x}{l} + \Big(\frac{x}{l}\Big)^3\Big] \tag{23}$$

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{120\,EI}\left[4 - 5\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^5\right] - \frac{A_z\,l^3}{6\,EI}\left[2 - 3\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \tag{24}$$

<u>Geometrische Verträglichkeitsbedingung:</u>

$$0 = w\,(x=0) = \frac{4q_0 l^4}{120\,EI} - \frac{A_z\,l^3}{3\,EI} \tag{25}$$

Daraus folgt A_z zu:

$$A_z = \frac{q_0 l^4}{30\,EI}\cdot\frac{3EI}{l^3} = \frac{q_0 l}{10} \tag{26}$$

Verdrehwinkel:
mit $w'(x) = w'_I(x) + w'_{II}(x)$

$$w'(x) = \frac{q_0 l^3}{120\,EI}\left[5\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right] \tag{27}$$

$$\varphi_A = w'(0) = \frac{q_0 l^3}{120\,EI} \tag{28}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 109

(a) Allgemein gilt (für über den Balken konstantes I und E):

$$EIw''''(x) = q(x) \tag{29}$$

Und für die spezielle Streckenlast in dieser Aufgabe:

$$EIw''''(x) = q_0\frac{x}{l} \tag{30}$$

(b) Um die allgemeine Lösung zu erhalten wird Gleichung (30) hochintegriert:

$$EIw'''(x) = \frac{1}{2}\frac{q_0}{l}x^2 + C_1 \tag{31}$$

$$EIw''(x) = \frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3 + C_1 x + C_2 \tag{32}$$

$$EIw'(x) = \frac{1}{24}\frac{q_0}{l}x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \tag{33}$$

$$EIw(x) = \frac{1}{120}\frac{q_0}{l}x^5 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \tag{34}$$

Die *dynamischen* Randbedingungen finden sich hier am linken Rand:

$$F_{qz}(x=0) \stackrel{!}{=} F \tag{35}$$

$$\Rightarrow \quad EIw'''(x=0) = -F \tag{36}$$

$$M_{by}(x=0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{37}$$

$$\Rightarrow \quad EIw''(x=0) = 0 \tag{38}$$

Die *geometrischen* Randbedingungen finden sich hier am rechten Rand (um diese Größen später besser einsetzen zu können, werden die Gleichungen mit EI multipliziert):

$$w(x=l) \stackrel{!}{=} 0 \tag{39}$$

$$\Rightarrow \quad EIw(x=l) = 0 \tag{40}$$

$$\varphi(x=l) \stackrel{!}{=} 0 \tag{41}$$

$$\Rightarrow \quad EIw'(x=l) = 0 \tag{42}$$

(c) Nun werden mit Hilfe der Randbedingungen die Unbekannten ausgerechnet:
(36) in (31):

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_1 = -F} \tag{43}$$

(38) in (32):

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_2 = 0} \tag{44}$$

(40) in (33) mit (43) und (44):

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_3 = -\frac{1}{24}q_0 l^3 + \frac{1}{2}Fl^2} \tag{45}$$

(42) in (34) mit (43), (44) und (45):

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_4 = \frac{1}{30}q_0 l^4 - \frac{1}{3}Fl^3} \tag{46}$$

(d) Aus (33) mit $\varphi_A = w'(x=0)$:

$$EIw'(x=0) = C_3 \tag{47}$$

Und mit (45):

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi_A = \left(-\frac{1}{24}q_0 l^3 + \frac{1}{2}Fl^2\right)\frac{1}{EI}} \tag{48}$$

(e) Gefordert ist:

$$w(0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{49}$$

Aus Gleichung (34):

$$\Rightarrow \quad C_4 = 0 \tag{50}$$

Das in Gleichung (46) eingesetzt und nach F aufgelöst:

$$\Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{1}{10}q_0 l} \tag{51}$$

Aufgabe 112

(a) Nein, zwei einwertige Lager und ein zweiwertiges ergeben zusammen vier Auflagerreaktionskomponenten, die sich nicht allein aus den drei Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen lassen, das System ist statisch unbestimmt. Deshalb lassen sich auch die Schnittlasten nicht allein aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen.

(b) Allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung:

Bereich I, $0 \le x < \frac{2}{3}l$:

$$EI{w_{\mathrm{I}}}''''(x) = q_0 \tag{52}$$
$$EI{w_{\mathrm{I}}}'''(x) = q_0 l \left\{ \left[\frac{x}{l}\right] + C_1 \right\} \tag{53}$$
$$EI{w_{\mathrm{I}}}''(x) = q_0 l^2 \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_1 \left[\frac{x}{l}\right] + C_2 \right\} \tag{54}$$
$$EI{w_{\mathrm{I}}}'(x) = q_0 l^3 \left\{ \frac{1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_2 \left[\frac{x}{l}\right] + C_3 \right\} \tag{55}$$
$$EIw_{\mathrm{I}}(x) = q_0 l^4 \left\{ \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 + \frac{C_1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_2}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_3\left[\frac{x}{l}\right] + C_4 \right\} \tag{56}$$

Bereich II, $\frac{2}{3}l < x \le l$:

$$EI{w_{\mathrm{II}}}''''(x) = q_0 \tag{57}$$
$$EI{w_{\mathrm{II}}}'''(x) = q_0 l \left\{ \left[\frac{x}{l}\right] + C_5 \right\} \tag{58}$$
$$EI{w_{\mathrm{II}}}''(x) = q_0 l^2 \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_5 \left[\frac{x}{l}\right] + C_6 \right\} \tag{59}$$
$$EI{w_{\mathrm{II}}}'(x) = q_0 l^3 \left\{ \frac{1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_5}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_6 \left[\frac{x}{l}\right] + C_7 \right\} \tag{60}$$
$$EIw_{\mathrm{II}}(x) = q_0 l^4 \left\{ \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 + \frac{C_5}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_6}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_7\left[\frac{x}{l}\right] + C_8 \right\} \tag{61}$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$w_{\mathrm{I}}(0) = 0 \tag{62}$$
$$w_{\mathrm{I}}(\tfrac{2}{3}l) = 0 \tag{63}$$
$$w_{\mathrm{II}}(\tfrac{2}{3}l) = 0 \tag{64}$$
$$w_{\mathrm{II}}(l) = 0 \tag{65}$$
$${w_{\mathrm{I}}}'(\tfrac{2}{3}l) = {w_{\mathrm{II}}}'(\tfrac{2}{3}l) \tag{66}$$
$$M_{\mathrm{I}}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad {w_{\mathrm{I}}}''(0) = 0 \tag{67}$$
$$M_{\mathrm{I}}(\tfrac{2}{3}l) = M_{\mathrm{II}}(\tfrac{2}{3}l) \quad \Rightarrow \quad {w_{\mathrm{I}}}''(\tfrac{2}{3}l) = {w_{\mathrm{II}}}''(\tfrac{2}{3}l) \tag{68}$$
$$M_{\mathrm{II}}(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad {w_{\mathrm{II}}}''(l) = 0 \tag{69}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Einsetzen nach längerer Rechnung die folgenden Konstanten:

$$C_1 = -\frac{13}{48} \qquad C_2 = 0 \tag{70}$$
$$C_3 = \frac{5}{648} \qquad C_4 = 0 \tag{71}$$
$$C_5 = -\frac{23}{24} \qquad C_6 = \frac{11}{24} \tag{72}$$
$$C_7 = -\frac{47}{324} \qquad C_8 = \frac{11}{324} \tag{73}$$

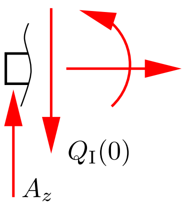
Für die Auflagerkräfte wird der Querkraftverlauf benötigt. Mit

$$-EIw''(x) = M(x)\,,\ M'(x) = Q(x) \tag{74}$$
$$-EIw'''(x) = Q(x) \tag{75}$$

ergibt sich

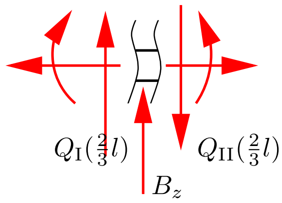
$$Q_{\mathrm{I}}(x) = q_0 l \left\{ \frac{13}{48} - \left[\frac{x}{l}\right] \right\} \tag{76}$$
$$Q_{\mathrm{II}}(x) = q_0 l \left\{ \frac{23}{24} - \left[\frac{x}{l}\right] \right\} \tag{77}$$

Freischnitt und Gleichgewicht am linken Ende:



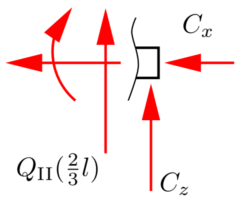
$$A_z = Q_{\mathrm{I}}(0) = \frac{13}{48} q_0 l \tag{78}$$

Freischnitt und Gleichgewicht am mittleren Lager:



$$B_z = Q_{\mathrm{II}}(\tfrac{2}{3}l) - Q_{\mathrm{I}}(\tfrac{2}{3}l) \tag{79}$$
$$= \frac{11}{16} q_0 l \tag{80}$$

Freischnitt und Gleichgewicht am rechten Lager:



$$C_z = -Q_{\mathrm{II}}(l) = \frac{1}{24} q_0 l \tag{81}$$

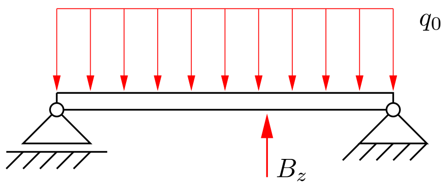
(Und $C_x = 0$ aus Gleichgewicht für den gesamten Balken.)

(c)

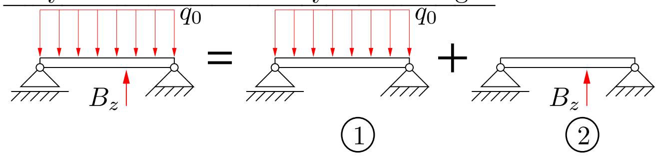
1. Statisch bestimmtes Ersatzsystem:

Ersetze eine Fesselung durch ihre unbekannte Reaktionslast. Diese wird nun im folgenden als äußere Last behandelt (als wenn sie bekannt wäre).

Zum Beispiel wird das mittlere Lager B durch die Kraft B_z ersetzt und wir erhalten folgendes statisch bestimmte Ersatzsystem:



2. System in einfache Teilsysteme zerlegen



Superpositionsprinzip: Die Gesamtverformung ergibt sich aus der Summe der Verformung der Teilsysteme:

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \tag{82}$$

3. Lösungen der einfachen Teilsysteme z.B. aus Tabellenwerk (Hütte, Dubbel o. ä.):

$$w_1(x) = \frac{q_0 l^4}{EI}\left\{\frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 - \frac{1}{12}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]\right\} \tag{83}$$

$$\Rightarrow\ w_1(\frac{2}{3}l) = \frac{11}{972}\frac{q_0 l^4}{EI} \tag{84}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} w_{2\,\mathrm{I}}(x) & ;\ x < \frac{2}{3}l \\ w_{2\,\mathrm{II}}(x) & ;\ x > \frac{2}{3}l \end{cases},\quad \text{mit} \tag{85}$$

$$w_{2\,\mathrm{I}}(x) = \frac{B_z l^3}{EI}\left\{\frac{1}{18}\left[\frac{x}{l}\right]^3 - \frac{4}{81}\left[\frac{x}{l}\right]\right\} \quad \text{und} \tag{86}$$

$$w_{2\,\mathrm{II}}(x) = \frac{B_z l^3}{EI}\left\{-\frac{1}{9}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{1}{3}\left[\frac{x}{l}\right]^2 - \frac{22}{81}\left[\frac{x}{l}\right] + \frac{4}{81}\right\} \tag{87}$$

$$\Rightarrow\ w_2(\frac{2}{3}l) = -\frac{4}{243}\frac{B_z l^3}{EI} \tag{88}$$

4. Geometrische Verträglichkeitsbedingung (Zwangsbedingung)

$$w(\frac{2}{3}l) = 0 \tag{89}$$

Die Auswertung der Zwangsbedingung liefert uns die unbekannte Reaktionskraft B_z:

$$w_1(\frac{2}{3}l) + w_2(\frac{2}{3}l) \overset{!}{=} 0 \tag{90}$$

$$\Rightarrow\ B_z = \frac{11}{16} q_0 l \tag{91}$$

Das ist das gleiche Ergebnis wie in Teil (b), siehe Gl. (80).

(d) Der Verdrehwinkel oder die Neigung ist (bei kleinen Verformungen) gleich der ersten Ableitung der Biegelinie an dieser Stelle:

$$\varphi_A = w_{\mathrm{I}}{}'(0) = \frac{q_0 l^3}{EI} C_3 = \frac{5}{648}\frac{q_0 l^3}{EI} \tag{92}$$

Aufgabe 116

(a) Momentengleichgewicht:

$$M_D - 2\cdot\frac{L}{2}F_D = 0 \quad \Rightarrow \quad F_D = \frac{M_D}{L} \tag{93}$$

(b) Verdrehung φ_M in der Mitte des Radkreuzes durch Torsion zwischen Mitte und Nuß (das Ding, das die Schraube oder Mutter aufnimmt) ergibt sich aus der Material-Strukturgleichung für den Torsionstab, das Torsionsmoment ist konstant, deshalb $\varphi' = \varphi_M/(L/2)$:

$$M_T = G I_P \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi_M = \frac{M_T L}{2 G I_P} = \frac{16 M_D L}{G \pi d^4} \tag{94}$$

Daraus würde ohne Verbiegung der Hebel zum Anfassen eine Absenkung der Kraftankriffspunkte resultieren um

$$w_T = \varphi_M \frac{L}{2} = \frac{8 M_D L^2}{G \pi d^4}\ . \tag{95}$$

Dazu kommt die Verbiegung der Hebel (Kragarm mit Einzellast am Ende) von

$$w_B = \frac{1}{3}\frac{F_D (L/2)^3}{EI} = \frac{8}{3}\frac{M_D L^2}{E \pi d^4} \tag{96}$$

Also zusammen (beim Entlasten natürlich umgekehrte Richtung wie beim Belasten):

$$w = w_T + w_B = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{G} + \frac{1}{3E}\right)\frac{M_D L^2}{d^4} \tag{97}$$
