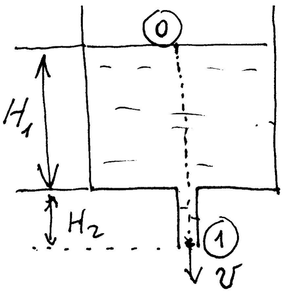
Beispiel 1. Ausflusszeit aus einem Gefäß mit einer Spiegelfläche A_s und einer kleinen Öffnung A.



Lösung: Bei kleiner Austrittsöffnung ist die Strömung "fast stationär" und somit ist die Bernoulli-Gleichung anwendbar:

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{1}{2}v_0^2+gH_1=\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}v^2-gH_2$$

Die beiden Drücke sind gleich (dem atmosphärischen Druck): $p_0=p_1$, die Geschwindigkeit v_0 ist "fast Null": $v_0\approx 0$; die Bernoulli-Gleichung nimmt somit die Form

$g\left(H_1+H_2\right)=\frac{1}{2}v^2$ an. Daraus folgt

$$v=\sqrt{2g\left(H_1+H_2\right)} \qquad (1)$$

v_0 ist zwar "fast Null", aber nicht ganz. Aus der Kontinuitätsgleichung $A_s v_0 = Av$ folgt $v_0 = Av/A_s$. Diese Geschwindigkeit ist nichts anderes als die zeitliche Änderung der Spiegelhöhe (mit negativem Vorzeichen):

$$v_0=v\frac{A}{A_s}=-\frac{dH_1}{dt}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (1):

$$\sqrt{2g\left(H_1+H_2\right)}\,\frac{A}{A_s}=-\frac{dH_1}{dt}.$$

Nach Trennung der Variablen und Integration ergibt sich

$$\int_0^T dt\,\frac{A}{A_s}=-\int_{H_{1(0)}}^{0}\frac{dH_1}{\sqrt{2g\left(H_1+H_2\right)}};$$

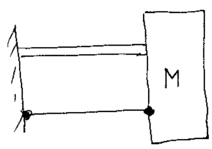
$$T\frac{A}{A_s}=-\int_{H_{1(0)}}^{0}\frac{dH_1}{\sqrt{2g\left(H_1+H_2\right)}}=-\sqrt{\frac{2\left(H_1+H_2\right)}{g}}\Bigg|_{H_{1(0)}}^{0}=$$

$$=-\sqrt{\frac{2H_2}{g}}+\sqrt{\frac{2\left(H_{1(0)}+H_2\right)}{g}}$$

Für die Ausflusszeit ergibt sich

$$\boxed{T=\frac{A_s}{A}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{\left(H_{1(0)}+H_2\right)}-\sqrt{H_2}\right)}.$$

Beispiel 2. Wie bewegt sich der Block?



Beispiel 3. Eigenformen
Die erste Eigenform hat *innerhalb* des Systems *keine Knoten (Nullstellen).*
Die zweite Eigenform hat *innerhalb* des Systems genau eine Nullstelle.

Beispiel 4. Wellensausbreitung
Die allgemeine Lösung der Wellengleichung $\ddot{w}=c^2w''$ lautet nach d'Alembert
$w(x,t)=f_1(x+ct)+f_2(x-ct)$.

Ist $w(x,t)=\tan\left(\frac{x}{c}-t\right)-\frac{1}{\sqrt{x+ct}}$ eine Lösung der Wellengleichung?

Ist $w(x,t)=x^2+c^2t^2$ eine Lösung?

5. Welche Differentialgleichungen beschreiben die Dynamik von Saiten, Stäben, Balken?
Lösung:
Saite: $\ddot{w}=c^2w''$ mit $c^2=S/\mu$.
Longitudinalschwingungen in einem Stab:
$\ddot{u}=c^2u''$ mit $c^2=E/\rho$.
Torsionsstab: $\ddot{\theta}=c^2\theta''$ mit $c^2=G/\rho$.

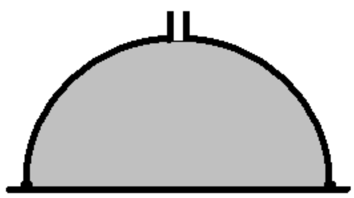
Biegebalken: $\ddot{w}=-\frac{EI}{\rho A}w^{IV}$ (längshomogen).

Für einen Biegebalken sollte man auch die folgenden Gleichungen auswendig kennen:

$M=-EIw''$, $Q(x)=\frac{\partial M}{\partial x}=M'$.

Für den Stab ist $EAu'=N$.
Diese Beziehungen werden z.B. bei Erstellung von Randbedingungen benutzt.

Beispiel 6.



Ein Gefäß in Form einer Halbkugel mit dem Radius R liegt auf einer Gummimatte. Wenn es bis oben mit Wasser gefüllt ist, wird die Kontaktstelle zwischen dem Gefäß und der Matte undicht und das Wasser beginnt auszufließen. Zu bestimmen ist die Masse M der Halbkugel.
Lösung: Das Gefäß samt Wasser befindet sich im Gleichgewicht. Deshalb ist die auf

das System seitens der Matte wirkende Reaktionskraft N gleich dem Gesamtgewicht

$$N = M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3 g$$

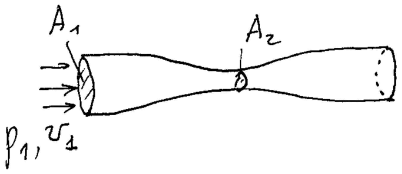
Im Moment des "Aufschwimmens" der Halbkugel ist die Reaktionskraft gleich der Druckkraft des Wassers auf den Boden:

$$N = \pi R^2 \rho g R .$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$M = \frac{1}{3}\pi\rho g R^3 .$$

Beispiel 7. Wasser fließt in einem sich verjüngenden Rohr. Der Druck beim Eintritt ins Rohr ist gleich p_1. Wie groß darf die Strömungsgeschwindigkeit höchstens sein, damit im Rohr keine Kavitation auftritt?



Lösung: Aus der Kontinuitätsgleichung

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{folgt} \qquad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

Die Bernoulli-Gleichung für Punkte 1 und 2:

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^{\,2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^{\,2} .$$

Daraus folgt für den Druck p_2:

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2} v_1^{\,2} \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) .$$

Der kleinste Druck tritt am Ort des kleinsten Querschnitts auf. Er darf nicht kleiner sein, als der gesättigte Dampfdruck p_D:

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2} v_1^{\,2} \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) > p_D .$$

Die Geschwindigkeit muß demnach kleiner sein als

$$v_1 < \sqrt{\frac{2(p_1 - p_D)}{\rho\left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}} .$$

Beispiel 8. Biegewellen in einem Balken
Wirkt man mit einer periodischen, harmonischen Kraft am Ende eines Balkens, so werden im Balken die sich von diesem Ende ausbreitenden Wellen angeregt. Prüfen Sie, ob man die Lösung in der Form $w(x,t) = \sin(\omega t - \kappa x)$ darstellen kann. Wie groß ist die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit? Hängt sie von der Frequenz ab?

Lösung: Einsetzen des Lösungsansatzes in die Bewegungsgleichung für Biegeschwingungen eines Balkens $\ddot{w} = -\frac{EI}{\rho A} w^{IV}$ ergibt

$$-\omega^2 = -\frac{EI}{\rho A}\kappa^4 .$$ Daraus folgt

$$\kappa = \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \omega^{1/2} .$$

Der Lösungsansatz selbst kann in der Form

$$w(x,t) = \sin(\omega t - \kappa x) = -\sin \kappa \left(x - \frac{\omega}{\kappa} t \right)$$
$$= -\sin \kappa \left(x - ct \right)$$

Daraus folgt für die Wellengeschwindigkeit (die sogenannte Phasengeschwindigkeit)

$$c = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \omega^{1/2}} = \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{-1/4} \omega^{1/2} .$$

Daß bedeutet, daß Wellen mit höheren Frequenzen sich schneller ausbreiten.