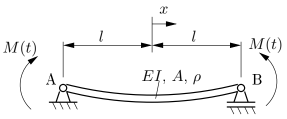
Tutorium

Aufgabe 51

Ein elastischer, massebehafteter Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge $2l$, Querschnittsfläche A und Dichte ρ) ist links und rechts gelenkig gelagert. An beiden Enden greift ein periodisches Moment $M(t) = M_0 \cos \Omega t$ an. Unter Vernachlässigung der Dämpfung soll die Amplitude im stationären, eingeschwungenen Zustand bestimmt werden.



Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Geben Sie die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung an.

(b) Wie lauten die Randbedingungen? Beachten Sie die eingezeichnete x-Koordinate.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung mit einem Ansatz vom **Typ der rechten Seite.** Wie lautet die Differentialgleichung für die Ortsfunktion und deren allgemeine Lösung?

(d) Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung im eingeschwungenen Zustand.

(e) Gibt es eine Phasenverschiebung zwischen Fremderregung und Systemantwort? Begründen Sie Ihre Antwort.

Geg.: M_0, Ω, l, EI, A, ρ

(a)

$$\ddot{w}(x,t) = -c^2 w^{IV}(x,t) \text{ mit } c^2 = \frac{EI}{\rho A} \tag{1}$$

(b) Die Randbedingungen lauten

$$w(-l,t) = 0 \tag{2}$$
$$w(l,t) = 0 \tag{3}$$
$$-EIw''(-l,t) = M_b(-l,t) = M_0\cos(\Omega t) \tag{4}$$
$$-EIw''(l,t) = M_b(l,t) = M_0\cos(\Omega t) \tag{5}$$

(c) Ansatz:

$$w(x,t) = W(x)\cos\Omega t \tag{6}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$-\Omega^2 W(x,t)\cos\Omega t = -c^2 W^{IV}(x,t)\cos\Omega t \tag{7}$$
$$W^{IV}(x,t) - \lambda^4 W(x,t) = 0 \text{ mit } \lambda^4 = \frac{\Omega^2}{c^2}\,. \tag{8}$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL lautet:

$$W(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\cosh\lambda x + B\sinh\lambda x\,. \tag{9}$$

(d) Aus RBen (2) und (3) ergibt sich:

$$0 = A\cos\lambda l - B\sin\lambda l + C\cosh\lambda l - D\sinh\lambda l \tag{10}$$
$$0 = A\cos\lambda l + B\sin\lambda l + C\cosh\lambda l + D\sinh\lambda l \tag{11}$$

.

Aus RBen (4) und (5) ergibt sich:

$$-\frac{M_0}{EI\lambda^2} = -A\cos\lambda l + B\sin\lambda l + C\cosh\lambda l - D\sinh\lambda l \tag{12}$$
$$-\frac{M_0}{EI\lambda^2} = -A\cos\lambda l - B\sin\lambda l + C\cosh\lambda l + D\sinh\lambda l \tag{13}$$

Subtraktion (10) - (11) und (12) - (13) ergibt:

$$0 = -B\sin\lambda l - D\sin\lambda l \tag{14}$$
$$0 = B\sin\lambda l - D\sin\lambda l \tag{15}$$
$$\Rightarrow B = D = 0\,. \tag{16}$$

(Es gibt auch den einen Punkt wenn für die Argumentation, dass die Konstanten aus Symmetriegründen null sein müssen.) Aus (10) ergibt sich:

$$A = -C\frac{\cosh\lambda l}{\cos\lambda l}\,. \tag{17}$$

Dies eingesetzt in (12) ergibt:

$$C = -\frac{M_0}{2EI\lambda^2}\frac{1}{\cosh\lambda l} \tag{18}$$
$$\Rightarrow A = \frac{M_0}{2EI\lambda^2}\frac{1}{\cos\lambda l} \tag{19}$$

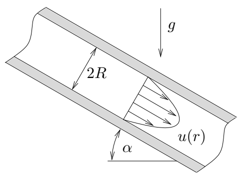
Damit ergibt sich für die Lösung der partiellen Differntialgleichung:

$$w(x,t) = \frac{M_0}{2EI\lambda^2}\left(\frac{\cos\lambda x}{\cos\lambda l} - \frac{\cosh\lambda x}{\cosh\lambda l}\right)\cos\Omega t$$

(e) Es gibt keine Phasenverschiebung, da ein ungedämpftes System betrachtet wird.

Aufgabe 81

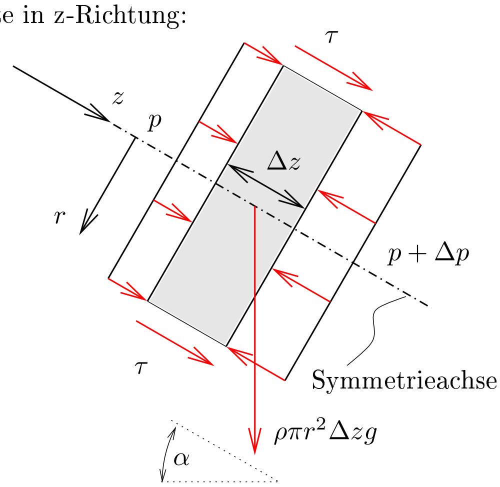
Betrachtet wird ein Rohr (Radius R, Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen α), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η, Dichte ρ) fließt. Der Volumenstrom sei Q. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden.



Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ bei stationärer Strömung in Abhängigkeit von den gegebenen Größen.

Geg.: R, Q, η, α, g

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils betrachte man das Kräftegleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskräften und der Gewichtskraft an einem Fluidelement. Dabei nutze man die Symmetrie des Problems. Das scheibenförmige Fluidelemt hat die Endflächen $A_E = \pi r^2$ und die Mantelfläche $A_M = 2\pi r\Delta z$. Damit ist die Summe der Kräfte in z-Richtung:



$$\begin{aligned} 0 =& \tau\, 2\pi r\Delta z - \Delta p\pi r^2 \\ &+ \rho\pi r^2\Delta z g\sin\alpha \end{aligned} \tag{20}$$
$$0 = 2\tau - r\frac{\Delta p}{\Delta z} + \rho g r\sin\alpha \tag{21}$$

Grenzübergang $\Delta z \to 0$:

$$\tau = \frac{r}{2}\frac{dp}{dz} - \frac{1}{2}\rho g r\sin\alpha \tag{22}$$

Wir nehmen an, dass der Druck p nur von der Lauflänge z abhängt: $p = p(z)$. Diese Annahme scheint gerechtfertigt, wenn dass Rohr hinreichen dünn ist. Bei einer Newton'schen Flüssigkeit beschreibt folgendes Materialgesetz den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Schubspannung aus Gleichung (22):

$$\tau = \eta \frac{du}{dr} \tag{23}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} - \frac{\rho g r^2 \sin\alpha}{4} + C \right\} \tag{24}$$

Die unbekannte Integrationskonstante C wird durch die Randbedingung bestimmt. An der Rohrwand gilt die Wandhaftbedingung:

$$u(r = R) \overset{!}{=} 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow C = \frac{R^2}{4} \left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha \right] \tag{26}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{4\eta} \left\{ \left(R^2 - r^2\right) \left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha \right] \right\} \tag{27}$$

Jetzt ist das Geschwindigkeitsprofil $u = u(r)$ als Funktion des Druckgradienten $\frac{dp}{dz}$ bekannt. In der Aufgabenstellung ist aber der Volumenstrom Q vorgegeben:

$$Q \overset{\text{Idee!}}{=} \int_A u \, dA \overset{(27)}{=} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} u(r) r dr d\varphi \tag{28}$$

$$\cdots \Rightarrow Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha \right] \tag{29}$$

$$\Rightarrow \frac{8Q\eta}{\pi R^4} = \left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha \right] \tag{30}$$

(30) in (27):

$$u(r) = \left(R^2 - r^2\right) \frac{2Q}{\pi R^4} \tag{31}$$

$$= \frac{2Q}{\pi R^2} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \tag{32}$$