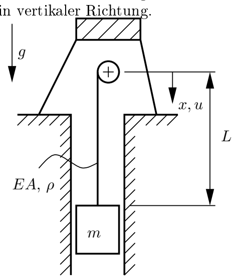
Tutorium

Aufgabe 24

Es soll das Eigenschwingverhalten des Systems Förderkorb/Seil einer Schachtanlage untersucht werden. Seil und Förderkorb schwingen in guter Näherung nur in vertikaler Richtung.



(a) Stellen Sie das zweite NEWTONsche Gesetz für ein infinitesimales Seilstück auf. Die lokale Verschiebung des Seils in x-Richtung sei $u(x,t)$. Leiten Sie dann mit dem Hookeschen Materialgesetz $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ die Bewegungsdifferentialgleichung für das dargestellte System her.

(b) Geben Sie die Randbedingungen für das System an! (*__Hinweis:__ Endmasse freischneiden.*)

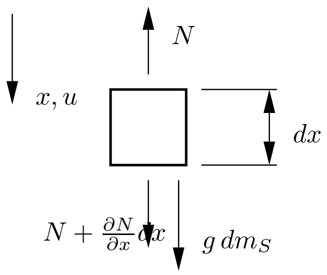
(c) Bestimmen Sie die statische Ruhelage $u_0(x)$ des Systems!

(d) Wie lauten die Differentialgleichung und die Randbedingungen mit der neuen Variablen $\tilde{u} = u - u_0$?

(e) Wie groß ist die erste Eigenfrequenz des Systems, wenn der Förderkorb in Schwingung gerät? Verwenden Sie die Gleichungen aus Teil (d)!

Geg.: L, E, A, ρ, m, g

(a)



Masse des Seilstücks:

$$dm_S = \rho\, A\, dx \tag{1}$$

Zweites NEWTONsches Gesetz
(Masse · Beschleunigung = $\sum$ äußere Kräfte):

$$dm_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N + \frac{\partial N}{\partial x}dx + g\, dm_S - N = \frac{\partial N}{\partial x}dx + g\, dm_S \tag{2}$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = \frac{\partial N}{\partial x}dx + g\,\rho\, A\, dx \tag{3}$$

Materialgesetz $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ einsetzen:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = \frac{\partial}{\partial x}\Big(EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big)dx + g\,\rho\, A\, dx \tag{4}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\rho \tag{5}$$

Bewegungsdifferential-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \qquad \text{mit } c^2 = \frac{E}{\rho} \tag{6}$$

(b) Am oberen Ende keine Verschiebung:

$$u(x=0,t) = 0 \qquad \forall t \tag{RB 1}$$

Am unteren Ende hängt nur noch eine Einzelmasse. Das zweite Newtonsche Gesetz für diese Masse liefert:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -N(x=l) + mg \tag{7}$$

Mit dem Materialgesetz für das Seil $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ ergibt sich:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} + EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = mg \qquad \forall t \tag{RB 2}$$

(c) Im Gleichgewicht ruht das System: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Eingesetzt in die Bewegungsdifferential-Gleichung (6):

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = -\frac{g}{c^2} \tag{8}$$

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2}x^2 + Dx + E \tag{9}$$

(RB 1) ergibt $E = 0$:

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2}x^2 + Dx \tag{10}$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und (10) eingesetzt in (RB 2)

$$\Rightarrow D = g\Big(\frac{m}{EA} + \frac{l}{c^2}\Big) \tag{11}$$

Wir erhalten:

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2}x^2 + \Big(\frac{mg}{EA} + \frac{lg}{c^2}\Big)x \tag{12}$$

(d)

$$\tilde{u} = u - u_0 \Leftrightarrow \quad u = \tilde{u} + u_0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{g}{c^2} \tag{15}$$

Einsetzen in (6) ergibt die transformierte Bewegungsdifferential-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \tag{16}$$

Analog ergeben sich auch die transformierten Randbedingungen:

$$\tilde{u}(x=0,t) = 0 \tag{RBT 1}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}\Big|_{x=l} + \frac{EA}{m}\cdot\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \tag{RBT 2}$$

(e) Die partielle Dgl. (16) kann mithilfe des Produktansatzes von BERNOULLI in zwei gewöhnliche Dgln. überführt werden, von denen man die allgemeinen Lösungen kennt. Das führt auf die allgemeine Lösung

$$\tilde{u}_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) \quad \text{mit} \tag{17}$$

$$T_k(t) = B_k \sin\omega_k t + C_k\cos\omega_k t, \tag{18}$$

$$X_k(x) = D_k \sin\frac{\omega_k}{c}x + E_k\cos\frac{\omega_k}{c}x \tag{19}$$

und (unendlich vielen) noch zu bestimmenden Konstanten $B_k, \ldots, E_k$ und Eigenfrequenzen ω_k.

Die erste Randbedingung (RBT 1) ergibt:

$$E_k = 0 \tag{20}$$

Mit der Abkürzung $\xi = \frac{EA}{m}$ ergibt die zweite Randbedingung (RBT 2) mit $E_k = 0$:

$$-\omega_k^2 T_k \cdot D_k \sin\frac{\omega_k}{c}l + \xi T_k D_k \frac{\omega_k}{c}\cos\frac{\omega_k}{c}l = 0$$
$$T_k(t) D_k(-\omega_k^2 \sin\frac{\omega_k}{c}l + \xi\frac{\omega_k}{c}\cos\frac{\omega_k}{c}l) = 0$$

Diese Gleichung ist für jedes k auszuwerten. Die Gleichung soll $\forall t$ gelten, und im Allgemeinen ist $T_k(t) \neq 0$. $D_k = 0$ bedeutet die triviale Lösung und scheidet damit aus. Es bleibt, dass der Klammerausdruck zu Null werden muss, damit die zweite Randbedingung (und gleichzeitig die erste) gelten. Es ist also zu fordern

$$\omega_k^2 \sin\frac{\omega_k}{c}l = \xi\frac{\omega_k}{c}\cos\frac{\omega_k}{c}l$$
$$\frac{\omega_k}{c}l \sin\frac{\omega_k}{c}l = \frac{\xi l}{c^2}\cos\frac{\omega_k}{c}l$$

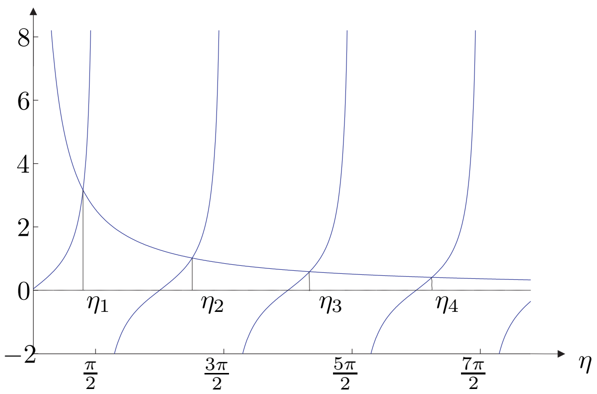
und mit der Abkürzung $\eta = \frac{\omega_k}{c}l$

$$\tan\eta = \frac{\xi l}{\eta c^2} = \frac{m_s}{m}\frac{1}{\eta} \tag{21}$$

mit $m_s = \rho A l$. Oder ausgeschrieben:

$$\tan\frac{l}{c}\omega_k = \frac{EA}{cm}\cdot\frac{1}{\omega_k} \tag{22}$$

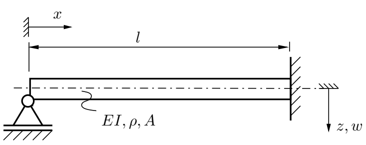
Das folgende Diagramm zeigt die grafischen Lösungen für ein Massenverhältnis $\frac{m_s}{m} = 4$.



Aufgabe 29

Der skizzierte massebehaftete Balken wird durch geeignete Anfangsbedingungen in freie Biegeschwingungen versetzt.

Gegeben: A, EI, ρ, l



(a) Wie lautet die das System beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

(b) Formen Sie diese partielle Differentialgleichung mit einem Produktansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen um und geben Sie deren Lösungen an.

(c) Formulieren Sie die geometrischen und physikalischen Randbedingungen.

(d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf und geben Sie Näherungslösungen an.

(a) Die Differentialgleichung für die Biegeschwingungen des Euler-Bernoulli-Balken lautet:

$$\ddot{w} + c^2 w^{(4)} = 0 \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{EI}{\rho A}\,. \tag{23}$$

Es handelt sich um eine partielle Differentialgleichung.

(b) Mit einem Produktansatz (Ansatz nach Bernoulli)

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{24}$$

folgt aus (23)

$$X\ddot{T} + c^2 X^{(4)} T = 0 \tag{25}$$

und schließlich

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -c^2\frac{X^{(4)}}{X} = -\omega^2 \quad . \tag{26}$$

Die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen lauten dann

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{27}$$
$$X^{(4)} - \lambda^4 X = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \frac{\omega^2}{c^2}\,. \tag{28}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (28) lautet:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + \\ + C\cosh\lambda x + D\sinh\lambda x \tag{29}$$

Für die Zeitfunktion ergibt sich

$$T = \tilde{C}\cos(\omega t + \varphi) \quad .$$

(c) Aufgrund der Lagerung des Balkens liegen die folgenden Randbedingungen (jeweils zwei für jeden Rand) vor.

$$w(x=0,t) = 0 = X(0)T(t) \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0 \tag{30}$$
$$w''(x=0,t) = 0 = X''(0)T(t) \quad \Rightarrow \quad X''(0) = 0 \tag{31}$$
$$w(x=l,t) = 0 = X(l)T(t) \quad \Rightarrow \quad X(l) = 0 \tag{32}$$
$$w'(x=l,t) = 0 = X'(l)T(t) \quad \Rightarrow \quad X'(l) = 0 \tag{33}$$

(d) Anpassen an Randbedingungen:

$$\overset{(30)}{\Rightarrow} \quad X(0) = A + C = 0 \tag{34}$$
$$\overset{(31)}{\Rightarrow} \quad X''(0) = \lambda^2(-A + C) = 0 \tag{35}$$
$$\Rightarrow \quad A = C = 0 \tag{36}$$
$$\overset{(32)}{\Rightarrow} \quad X(l) = B\sin\lambda l + D\sinh\lambda l = 0 \tag{37}$$
$$\overset{(33)}{\Rightarrow} \quad X'(l) = \lambda B\cos\lambda l + \lambda D\cosh\lambda l = 0 \tag{38}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\lambda l & \sinh\lambda l \\ \lambda\cos\lambda l & \lambda\cosh\lambda l \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Es existieren nur nichttriviale Lösungen für B und D, wenn die Determinante von $\underline{\underline{A}}$ verschwindet.

$$\det \underline{\underline{A}} \stackrel{!}{=} 0 \tag{40}$$

$$= \lambda \sin \lambda l \cosh \lambda l - \lambda \sinh \lambda l \cos \lambda l = 0 \tag{41}$$

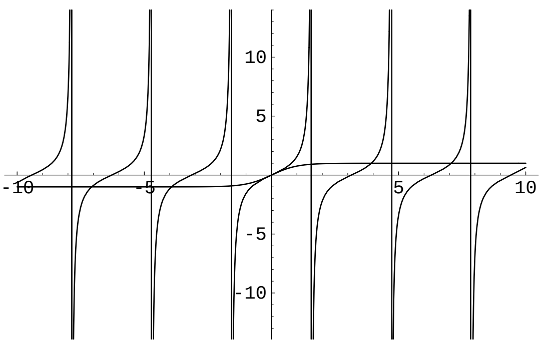
Diese Gleichung ist für $\lambda = 0$ erfüllt, was wiederum auf die triviale Lösung führt.

$$\text{für } \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \lambda l \cosh \lambda l - \sinh \lambda l \cos \lambda l = 0 \tag{42}$$

$$\Rightarrow \quad \tan \lambda l = \tanh \lambda l \tag{43}$$

Lösungen dieser Gleichung lassen sich numerisch oder grafisch bestimmen. Die numerische Berechnung ergibt

$$l\lambda_1 \approx 3{,}93$$
$$l\lambda_2 \approx 7{,}07$$
$$l\lambda_3 \approx 10{,}21$$
$$l\lambda_4 \approx 13{,}35$$



Man erkennt unschwer die Abschätzung

$$\tanh \lambda l \approx 1 \quad \text{für} \quad \lambda l > \pi \ . \tag{44}$$

Damit lassen sich die Eigenkreisfrequenzen näherungsweise berechnen.

$$\stackrel{(43)}{\Rightarrow} \quad \tan \lambda l = \tanh \lambda l \approx 1 \tag{45}$$

$$\Rightarrow \quad \sin \lambda l \stackrel{!}{=} \cos \lambda l \tag{46}$$

Es folgt also

$$\lambda_k l = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, \infty \quad . \tag{47}$$

Vergleich mit den numerischen Ergebnissen zeigt, dass selbst für λ_1 schon sehr gute Ergebnisse erzielt werden.

Die Eigenkreisfrequenzen ω_k ergeben sich schließlich wie folgt.

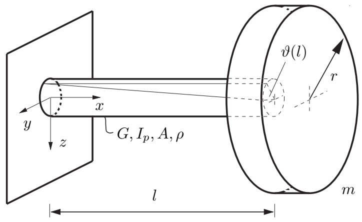
$$\lambda_k^2 = \frac{\omega_k}{c} \tag{48}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{c}{l^2} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right)^2 \tag{49}$$

Aufgabe 28

Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Stab um seine Längsachse schwingen.

Geg.: l, m, G, I_p, A, ρ, r



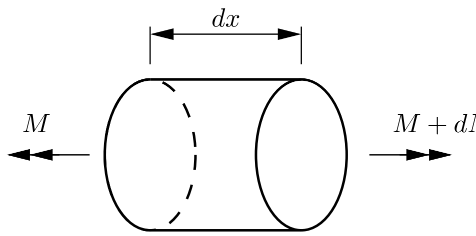
(a) Geben Sie die Differentialgleichung für die freie Torsionsschwingung an (Herleitung nicht erforderlich) und formen Sie diese in 2 gewöhnliche Differentialgleichungen um.

(b) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen? Wie lautet die Lösung der partiellen Differentialgleichung?

(c) Formulieren Sie die geometrischen und die dynamischen Randbedingungen.

(d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf und skizzieren Sie, wie sich die ersten Eigenkreisfrequenzen grafisch bestimmen lassen.

(a)



Materialgesetz:

$$GI_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = M \tag{50}$$

Drehimpulssatz zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$$dJ_{\text{stab}} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = -M + M + dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \tag{51}$$

mit $dJ_{\text{stab}} = I_p \rho \, dx$ und $c_D^2 = \frac{G}{\rho}$ ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = c_D^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \tag{52}$$

Setze den Produktsatz nach Bernoulli

$$\vartheta(x,t) = X(x) T(t) \tag{53}$$

in die Wellendifferentialgleichung (52) ein:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_D^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = konst. \, (= -\omega^2) \tag{54}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \frac{\omega^2}{c_D^2} X(x) &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

(b) Lösungen für (55):

$$\begin{aligned} T(t) &= z_1 \sin \omega t + z_2 \cos \omega t \\ X(x) &= z_3 \sin \frac{\omega}{c_D} x + z_4 \cos \frac{\omega}{c_D} x \end{aligned} \tag{56}$$

Lösung für (52) mit (56):

$$\vartheta(x,t) = X(x) T(t) \tag{57}$$

(c)

$$\vartheta(x=0,t)=0 \tag{RB 1}$$

ist eine geometrische Randbedingung

Freischneiden der Einzelmasse am rechten Ende:

$$M(x=l,t) = -J_E \left.\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right|_{x=l,t} \tag{58}$$

mit $J_E = \frac{1}{2}mr^2$ und dem Materialgesetz (50) ergibt sich

$$\left.\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right|_{x=l,t} + \frac{2GI_p}{mr^2}\cdot\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=l,t} = 0 \tag{RB 2}$$

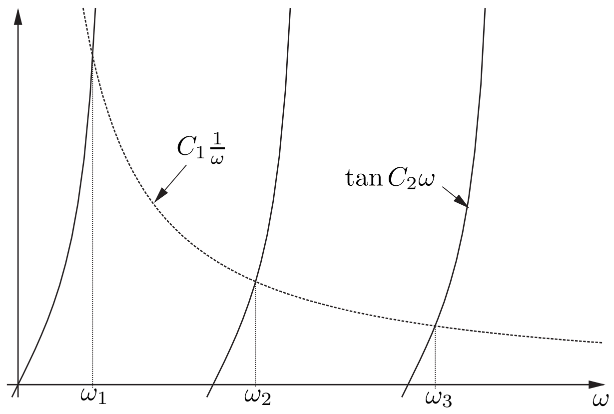
(d) In Gleichung (56) kann $z_2 = 0$ gesetzt werden. Aus (RB 1) folgt $z_4 = 0$. Mit $z_5 = z_1 z_3$ ergibt sich aus (57)

$$\vartheta(x,t) = z_5 \sin\omega t \sin\frac{\omega}{c_D}x \tag{59}$$

einsetzen in (RB 2) ergibt die Frequenzgleichung

$$\tan\frac{l}{c_D}\omega = \frac{2GI_p}{mr^2c_D}\cdot\frac{1}{\omega} \tag{60}$$

Sie hat unendlich viele Lösungen für ω.



Aufgabe 34

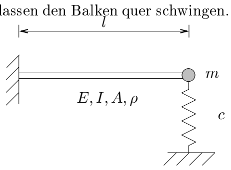
Ein einseitig eingespannter, massebehafteter Balken trägt am freien Ende eine Einzelmasse und ist dort mit einer Feder abgestützt. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Balken quer schwingen.

(a) Forme die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_Q^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ um in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen!

(b) Bestimme die allgemeine Lösung der Ortsfunktion mit einem Exponentialansatz!

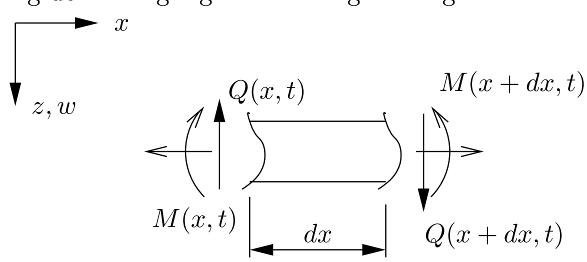
(c) Formuliere die geometrischen und dynamischen Randbedingungen!

(d) Stelle die Frequenzgleichung auf, und gib eine Bestimmungsgleichung für die Eigenformen an!



Gegeben seien die Größen: l, m, c, E, I, A, ρ

Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung:



Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm\cdot\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx,t) - Q(x,t) \tag{61}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $Q(x+dx,t) \cong Q(x,t) + \frac{\partial Q}{\partial x}dx$ ergibt sich

$$\rho\cdot A\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{62}$$

mit $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ und dem Materialgesetz $M = -EI\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes ρ,A,E,I die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{63}$$

(a) Separationsansatz nach Bernoulli:

$$w(x,t) = X(x)\cdot T(t) \tag{64}$$

Eingesetzt in (63) ergibt

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{65}$$

$$X'''' - \frac{\omega^2}{c_Q^2}X = 0 \tag{66}$$

mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ und ω noch zu bestimmende Konstante.

(b) Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (65) und (66) werden mit einem Exponentialansatz gelöst. Die als allgemeine Lösung resultierende Linearkombination der Exponentialfunktionen ist äquivalent zu einer Linearkombination aus Sinus und Kosinus bzw. zusätzlich sinh und cosh.

Für die Zeitfunktion erhalten wir:

$$T(t) = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t \tag{67}$$

Für die Ortsfunktion ergibt sich:

$$\begin{aligned} X(x) = {} & B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x \\ & + B_5\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_6\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x \end{aligned} \tag{68}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (63) lautet dann:

$$\begin{aligned} \omega(x,t) = {} & \sum_{k=1}^{\infty}\Big(B_{1,k}\cos\omega_k t + B_{2,k}\sin\omega_k t\Big) \\ & \Big(B_{3,k}\cosh\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{4,k}\sinh\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x \\ & + B_{5,k}\cos\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{6,k}\sin\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x\Big) \end{aligned} \tag{69}$$

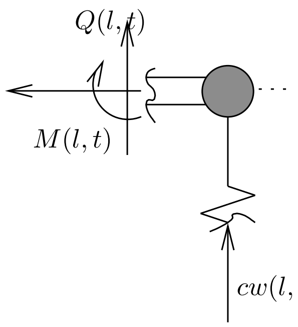
(c) Am linken Rand besteht eine feste Einspannung charakterisiert durch die geometrischen Randbedingungen:

$$w(x=0,t)=0 \qquad \text{(RB 1)}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=0,t)}=0 \qquad \text{(RB 2)}$$

Am rechten Rand ergeben sich dynamische Randbedingungen:
Eine Punktmasse hat keine Drehträgheit und die Feder leitet auch kein Moment ein:

$$M(x=l,t)=0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(x=l,t)}=0 \qquad \text{(RB 3)}$$



Die Querkraft ergibt sich durch Freischneiden der Punktmasse m aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (c = Federsteifigkeit):

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -Q(l,t) - cw|_{(x=l,t)} \tag{70}$$

mit $Q=-EIw'''$ ergibt sich:

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = EI\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_{(x=l,t)} - cw|_{(x=l,t)} \qquad \text{(RB 4)}$$

(d) Bei Einsetzen der allg. Lösung in die Randbedingungen werden folgende Ableitungen benötigt:

$$X''(x) = \frac{\omega}{c_Q}\Big[B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_5\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \tag{71}$$

$$X'''(x) = \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big[B_3\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_5\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \tag{72}$$

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \tag{73}$$

Jede einzelne Fundamentallösung soll die Randbedingungen zu jeder Zeit erfüllen. Deshalb gilt $\forall k$ mit den Abkürzungen $B_3 := B_{3,k}$, …:

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \quad B_3 + B_5 = 0 \tag{74}$$

$$\text{(RB 2)} \Rightarrow \quad B_4 + B_6 = 0 \tag{75}$$

und es ergibt sich für (RB 3):

$$B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \big(-B_3\big)\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \big(-B_4\big)\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l = 0 \tag{76}$$

Für (RB 4) ergibt sich auch eine Gleichung für B_3 und B_4, zusammen mit (76) in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{77}$$

mit

$$M_{11} = \cosh\chi + \cos\chi$$

$$M_{12} = \sinh\chi + \sin\chi$$

$$M_{21} = -\frac{1}{EI}(m\omega^2 - c)\Big(\cosh\chi - \cos\chi\Big) - \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big)$$

$$M_{22} = -\frac{1}{EI}(m\omega^2 - c)\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) - \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\cosh\chi + \cos\chi\Big)$$

$$\chi := \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l \tag{78}$$

Eine Lösung, bei der $B_3 \neq 0$ und $B_4 \neq 0$, kann es nur geben, wenn die Determinante der Matrix verschwindet ($m_B = A\rho l$):

$$M_{11}\,M_{22} - M_{12}\,M_{21} \stackrel{!}{=} 0 \tag{79}$$

$$\frac{m}{m_B}\chi - \frac{cl^3}{EI}\chi^{-3} = \frac{1+\cosh\chi\cos\chi}{\cosh\chi\sin\chi - \sinh\chi\cos\chi} \tag{80}$$

Durch numerische Auswertung von (80) mit (78) lassen sich die Eigenfrequenzen ω_k ermitteln.

Die Gleichung (68) beschreibt die Eigenformen, wenn darin die ermittelten Eigenfrequenzen ω_k und die dazugehörigen Koeffizienten $B_3 \ldots B_6$ eingesetzt werden.