Tutorium

Aufgabe 1

(a) Gegeben sei eine Funktion $f(t,x) = a\cos(x+ct)$. Bestimme die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial t},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ !$$

(b) Gegeben sei eine Funktion $w(x,y) = ae^{x^2-y^2}$, mit $x = \sin y$. Berechne die folgenden Ableitungen:

$$\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{dw}{dy}\ !$$

(a) Beim partiellen Ableiten werden die unabhängigen Variablen, nach denen gerade nicht abgeleitet wird, als konstant angenommen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= -ac\sin(x+ct)\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -a\sin(x+ct)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -ac^2\cos(x+ct)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} &= -ac\cos(x+ct)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} &= -ac\cos(x+ct)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -a\cos(x+ct)
\end{aligned}$$

Wie erwartet ist $\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}$.

(b) Beim partiellen Ableiten werden die unabhängigen Variablen, nach denen gerade nicht abgeleitet wird, als konstant angenommen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= 2axe^{x^2-y^2}\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= -2aye^{x^2-y^2}
\end{aligned}$$

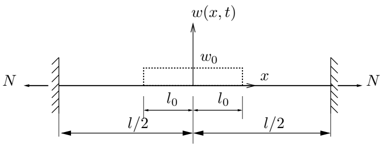
Für die totale Ableitung oder die Ableitung längs einer Kurve durch den x-y-Raum gilt: (in dieser Aufgabe wird diese Kurve durch $x = \sin y$ beschriebenen)

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy\\
\Rightarrow \frac{dw}{dy} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dy} \qquad (1)\\
&= 2axe^{x^2-y^2}\cdot\cos y - 2aye^{x^2-y^2}\cdot 1\\
&= 2a(x\cos y - y)e^{x^2-y^2}\ .
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man natürlich auch, wenn $x = \sin y$ in $w(x,y)$ eingesetzt und dann abgeleitet wird:

$$\begin{aligned}
w(x) &= ae^{\sin^2 y\,-\,y^2}\\
\frac{dw}{dy} &= a(2\sin y\cos y\ -\ 2y)e^{\sin^2 y\,-\,y^2}\\
&= 2a(\sin y\cos y\ -\ y)e^{\sin^2 y\,-\,y^2}\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5



Eine Saite der Länge l wird mit mit der Kraft N vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w(x,t=0) = \begin{cases} w_0 & \text{für } -l_0 \le x \le l_0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ mit dem Ansatz nach d'Alembert. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem.
Geg.: N, μ, l, $c^2 = \frac{N}{\mu}$, $w(x,t=0)$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

Das Problem wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (2)$$

beschrieben. Zur Lösung soll der Ansatz von d'Alembert

$$w(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \qquad (3)$$

benutzt werden. Dieser hat die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned}
\dot w(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}w(x,t)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\
&= -cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Dabei sind

$$f_1' := \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)}\text{und} \qquad (5)$$

$$f_2' := \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}. \qquad (6)$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden aus den Anfangsbedingungen

$$w(x,t=0) = \left\{\begin{array}{cc} w_0, & -l_0 \le x \le l_0\\ 0, & sonst\end{array}\right\} =: w_A(x), \qquad (7)$$

$$\dot w(x,t=0) = 0 \qquad (8)$$

bestimmt.

Aus (4) $\to$ (8) erhält man:

$$\begin{aligned}
\dot w(x,t) &= [-cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct)]_{t=0} = 0\\
&\Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) = 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

und durch Integration über x:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2A. \qquad (10)$$

Dabei ist $2A$ eine Integrationskonstante.
Analog ergibt sich aus (3) $\to$ (7):

$$\begin{aligned}
w(x,t=0) &= [f_1(x-ct) + f_2(x+ct)]_{t=0}\\
&= f_1(x) + f_2(x) = w_A(x). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Aus (10) + (11) folgt

$$f_1(x) = \frac{1}{2}w_A(x) + A. \qquad (12)$$

und analog aus (11) - (10)

$$f_2(x) = \frac{1}{2} w_A(x) - A. \tag{13}$$

Setzt man nun (12) und (13) in (3) ein, so erhält man

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_A(x-ct) + w_A(x+ct)\right], \; -\frac{l}{2} \leq x - ct, x + ct \leq \frac{l}{2}. \tag{14}$$

Die Anfangsauslenkung w_A spaltet sich in zwei Wellen mit halber Amplitude auf, die in entgegengesetzte Richtungen die Saite entlang laufen. Diese Lösung ist nur gültig, solange die Wellen die Ränder nicht berühren. Eine allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung der Randbedingungen. Die Saite ist an beiden Ende eingespannt, daher gilt:

$$w(x = -\frac{l}{2}, t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x = \frac{l}{2}, t) = 0. \tag{15}$$

Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn an den Rändern Wellen gleicher Form aber mit umgekehrten Vorzeichen und entgegengesetzter Laufrichtung reflektiert werden. Das wird erreicht, wenn die Lösung periodisch mit wechselndem Vorzeichen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Somit lautet die allgemeine Lösung:

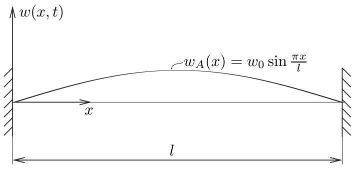
$$\begin{aligned} w(x,t) = &\left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2}w_0, & -l_0 \leq x - ct + (2n)l \leq l_0 \\ -\frac{1}{2}w_0, & -l_0 \leq x - ct + (2n+1)l \leq l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\} + \\ &+ \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2}w_0, & -l_0 \leq x + ct + 2nl \leq l_0 \\ -\frac{1}{2}w_0, & -l_0 \leq x + ct + (2n+1)l \leq l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dabei gilt $n \in \mathbb{Z}$. Die Saite schwingt mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2l}{c}. \tag{17}$$

Aufgabe 9

Eine Saite der Länge l wird mit der Kraft S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Saite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x)$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null.



Gegeben: $S, \mu, l, c^2 = \frac{S}{\mu}$,
$w(x, t=0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$, $\quad \frac{\partial w}{\partial t}\big|_{(x,t=0)} = 0$

Bestimmen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:

(a) Wie lautet der Ansatz nach d'Alembert?

(b) Leiten Sie den Ansatz nach der Zeit ab und setzen Sie die Anfangsbedingungen ein. Lösen Sie die beiden Gleichungen für den Zeitpunkt $t = 0$.

(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems?

(d) Wie müssen entsprechend die Teilwellen fortgesetzt werden, damit eine Lösung den Randbedingungen genügt? Geben Sie die Gesamtlösung des Problems, also $w(x,t)$, an.

(a) Das Problem wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{18}$$

beschrieben. Zur Lösung soll der Ansatz von d'Alembert

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{19}$$

benutzt werden.

(b) Dieser hat die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{w}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)} \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)} \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\ &= -c f_1'(x-ct) + c f_2'(x+ct). \end{aligned} \tag{20}$$

Dabei sind

$$f_1' := \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)} \text{und} \tag{21}$$

$$f_2' := \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}. \tag{22}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden aus den Anfangsbedingungen

$$w(x, t=0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} =: w_A(x), \tag{23}$$

$$\dot{w}(x, t=0) = 0 \tag{24}$$

bestimmt. Aus (20) $\rightarrow$ (24) erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{w}(x,t) = \left[-c f_1'(x-ct) + c f_2'(x+ct)\right]_{t=0} = 0 \\ \Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

und durch Integration über x:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2A. \tag{26}$$

Dabei ist $2A$ eine Integrationskonstante.
Analog ergibt sich aus (19) $\rightarrow$ (23):

$$\begin{aligned} w(x, t=0) &= \left[f_1(x-ct) + f_2(x+ct)\right]_{t=0} \\ &= f_1(x) + f_2(x) = w_A(x). \end{aligned} \tag{27}$$

Aus (26) + (27) folgt

$$f_1(x) = \frac{1}{2}w_A(x) + A. \tag{28}$$

und analog aus (27) - (26)

$$f_2(x) = \frac{1}{2}w_A(x) - A. \tag{29}$$

Setzt man nun (28) und (29) in (19) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\left[w_A(x-ct) + w_A(x+ct)\right] \\ &= \frac{w_0}{2}\left[\sin\frac{\pi}{l}(x-ct) + \sin\frac{\pi}{l}(x+ct)\right], \qquad (30) \\ 0 &\leq x-ct, x+ct \leq l. \qquad (31) \end{aligned}$$

Die Anfangsauslenkung w_A spaltet sich in zwei Wellen mit halber Amplitude auf, die in entgegengesetzte Richtungen die Saite entlang laufen. Diese Lösung ist nur gültig, solange die Wellen die Ränder nicht berühren.

(c) Eine allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung der Randbedingungen. Die Saite ist an beiden Ende fest eingespannt, daher gilt:

$$w(x=0,t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x=l,t) = 0. \tag{32}$$

(d) Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn an den Rändern Wellen gleicher Form aber mit umgekehrten Vorzeichen und entgegengesetzter Laufrichtung reflektiert werden. Das wird erreicht, wenn die Lösung periodisch mit wechselndem Vorzeichen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Diese Bedingung wird bereits durch Fortsetzung der Sinus-Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ erfüllt. Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$w(x,t) = \frac{w_0}{2}\left[\sin\frac{\pi}{l}(x-ct) + \sin\frac{\pi}{l}(x+ct)\right]. \tag{33}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 2

(a) Bestimme die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ der Funktion

$$f(x,t) = 2t\sqrt{kx+\omega t}$$

(b) Bestimme für den Fall, daß $x = v_0 t$ ist, die Ableitung $\frac{df}{dt}$ einmal durch Einsetzen von $x = v_0 t$ in f und anschließendes Ableiten nach t und einmal durch Anwenden der Formel

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$$

(c) Für die Koordinaten u und v beschreibe die Funktion g_{uv} eine Feldgröße $\mathcal{G}$:

$$(u,v) \to g_{uv}(u,v) := u^2 + \pi v^3$$

Das gleiche Feld $\mathcal{G}$ wird für die Koordinaten x und y beschrieben durch die (bisher nicht bekannte) Funktion g_{xy}:

$$(x,y) \to g_{xy}(x,y) = g_{uv}\big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

Zwischen den Koordinaten (u,v) und (x,y) gelten mit den bekannten Konstanten α und β die Transformationsbeziehungen

$$u(x,y) = \alpha x + \beta y \quad \text{und} \quad v(x,y) = \alpha x - \beta y$$

Bestimme zuerst die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten u und v: $\frac{\partial g_{uv}}{\partial u}$ und $\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}$.
Bestimme anschließend unter Verwendung von $\frac{\partial g_{uv}}{\partial u}$ und $\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}$ und mit den Komponenten der Jakobimatrix $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ die Ableitungen nach den Koordinaten x und y: $\frac{\partial g_{xy}}{\partial x}$ und $\frac{\partial g_{xy}}{\partial y}$ (in den dazu passenden Koordinaten)!

(a) Beim partiellen Ableiten werden die unabhängigen Variablen, nach denen gerade nicht abgeleitet wird, als konstant angenommen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= 2(kx+\omega t)^{\frac{1}{2}} + t\omega(kx+\omega t)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= tk(kx+\omega t)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= 2\omega(kx+\omega t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t\omega^2(kx+\omega t)^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} &= k(kx+\omega t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t\omega k(kx+\omega t)^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2}tk^2(kx+\omega t)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(b) <u>Einsetzen und Ableiten:</u>

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^{\frac{3}{2}}\sqrt{kv_0+\omega} \\ \frac{df}{dt} &= 3t^{\frac{1}{2}}\sqrt{kv_0+\omega} \qquad (34) \end{aligned}$$

<u>Totales Differential mit Kettenregel:</u>

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} \\ &= 2(kx+\omega t)^{\frac{1}{2}} + t\omega(kx+\omega t)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \ tk(kx+\omega t)^{-\frac{1}{2}}\cdot v_0 \\ &= 2(kx+\omega t)^{\frac{1}{2}} + (kv_0 t+\omega t)(kx+\omega t)^{-\frac{1}{2}} \\ &\ldots \text{und mit } x = v_0 t: \\ \frac{df}{dt} &= 3(kv_0 t+\omega t)^{\frac{1}{2}} \qquad (35) \end{aligned}$$

(c) Gegeben ist:

$$g_{uv}(u,v) = u^2 + \pi v^3 \tag{36}$$

$$u = \alpha x + \beta y \ , \ v = \alpha x - \beta y \tag{37}$$

$$g_{xy}(x,y) = g_{uv}\big(u(x,y), v(x,y)\big) \tag{38}$$

Partielle Ableitungen von g_{uv}:

$$\frac{\partial g_{uv}}{\partial u} = 2u \qquad \frac{\partial g_{uv}}{\partial v} = 3\pi v^2 \tag{39}$$

Komponenten der Jakobimatrix:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \beta,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\beta \tag{40}$$

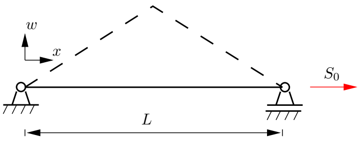
Partielle Ableitungen von g_{xy}:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial g_{uv}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_{uv}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\alpha + 3\pi v^2\alpha \\ &= \boxed{2\alpha(\alpha x + \beta y) + 3\pi\alpha(\alpha x - \beta y)^2}\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial g_{uv}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g_{uv}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2u\beta - 3\pi v^2\beta \\ &= \boxed{2\beta(\alpha x + \beta y) - 3\pi\beta(\alpha x - \beta y)^2}\end{aligned} \tag{42}$$

Aufgabe 3

Betrachtet wird die beidseitig eingespannte mit der Seilkraft S_0 vorgespannte Saite (Dichte ρ, Querschnittsfläche A_0). Sie kann transversale Schwingungen ausführen. Mit dem Lösungsansatz von D'ALEMBERT soll die Lösung zu folgenden Anfangsbedingungen bestimmt werden:



$\dot{w}(x,t=0) = 0$

$w(x,t=0) = \begin{cases} 2\frac{x}{L}w_0 & \text{für } 0 \le x < \frac{L}{2} \\ 2\left(1 - \frac{x}{L}\right)w_0 & \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$

Geg.: ρ, A_0, S_0, L, w_0

(a) Welche Gleichung beschreibt das Verhalten der Saite?
(b) Wie lautet die allgemeine Lösung nach D'ALEMBERT?
(c) Bestimme die Lösung für die gegebenen Anfangsbedingungen.
(d) Skizziere die Auslenkung der Saite für die folgenden Zeitpunkte: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{8}T$, $t_2 = \frac{1}{4}T$, $t_3 = \frac{3}{8}T$, $t_4 = \frac{1}{2}T$, $t_5 = \frac{5}{8}T$ mit $T = \frac{2L}{c}$ und $c^2 = \frac{S_0}{\rho A_0}$.

(a) Mit der Abkürzung

$$c^2 = \frac{S_0}{\rho A_0} \tag{43}$$

ergibt sich aus dem zweiten Newtonschen Gesetz für ein infinitesimales Stück der Saite die Wellendifferentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ . \tag{44}$$

Die Größe c heißt Wellenausbreitungsgeschwindigkeit.

(b) Die Lösung nach D'ALEMBERT besagt, daß sich zwei Wellen der Form $f_1(\xi)$ und $f_2(\xi)$ überlagern:

$$w(x,t) = f_1\left(\xi_1(x,t)\right) + f_2\left(\xi_2(x,t)\right)\ . \tag{45}$$

Die Wellen breiten sich in entgegengesetzter Richtung aus und zwar mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c:

$$\xi_1(x,t) = x - ct\ , \quad \xi_2(x,t) = x + ct\ . \tag{46}$$

$f_1(\xi_1)$ beschreibt also den Teil, der „nach rechts“ zu mit der Zeit größeren x-Werten wandert, $f_2(\xi_2)$ wandert „nach links“. Die Koordinaten $\xi_{1,2}$ sind sozusagen „wandernde x-Koordinaten“ und über diesen aufgetragen bleibt die Form der Welle $(f_{1,2}(\xi))$ immer die gleiche.

Durch zweimaliges partielles Ableiten von (45) nach x bzw. nach t und Einsetzen kann man zeigen, daß der Ansatz (45) die Wellendifferentialgleichung (44) tatsächlich erfüllt.

Die allgemeine Lösung lautet:

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)\ , \tag{47}$$

wobei die Funktionen $f_{1,2}$ aus den Anfangs- und Randbedingungen zu bestimmen sind.

(c) Als Anfangsbedingung sind die Lage und Geschwindigkeit aller Punkte auf der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Gleichung (47) angewendet auf die Anfangsbedingung für die Ausgangslage $w(x,t=0)$ ergibt:

$$w_A(x) = w(x,t=0) = f_1(x) + f_2(x) \tag{48}$$

($w_A(x)$ ist die in der Aufgabenstellung skizzierte Dreiecksfunktion.)

Die Geschwindigkeit am Anfang soll Null sein:

$$0 = v_0(x) = \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{(x,t=0)} \tag{49}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big[f_1(x-ct) + f_2(x+ct)\Big]_{(x,t=0)} \tag{50}$$

... mit Kettenregel ableiten, f_i' bezeichnet die erste Ableitung der Funktion f_i nach ihrem einzigen (!) Argument

$$= \Big[-cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct)\Big]_{(x,t=0)} \tag{51}$$

... und danach $(x,t) = (x,0)$ einsetzen

$$0 = -cf_1'(x) + cf_2'(x) \qquad \forall x \tag{52}$$

Beide Seiten über x integriert ergibt ($C =$ konst.):

$$C = f_2(x) - f_1(x) \quad \forall x \tag{53}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen (48) und (53) ergeben sich f_1 und f_2:

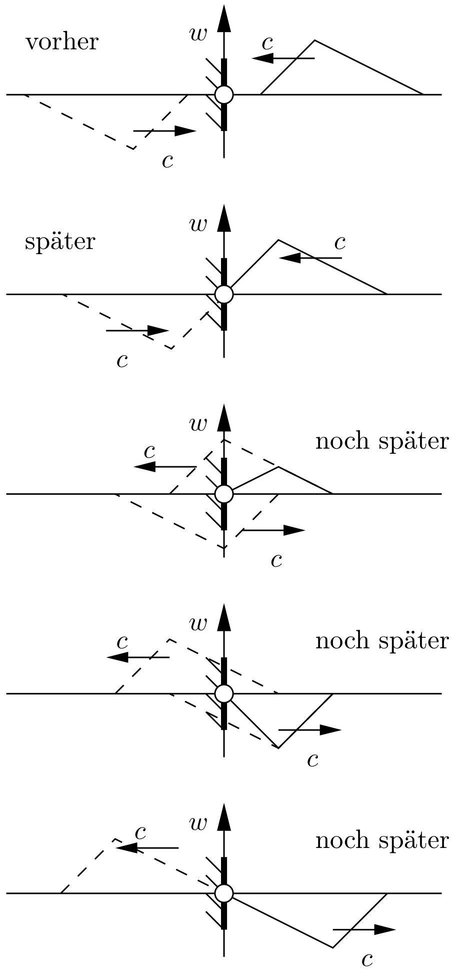
$$f_{1,2}(x) = \frac{1}{2}\big(w_A(x) \mp C\big) \tag{54}$$

Eingesetzt in Gleichung (47) ergibt sich (zunächst nur für $x - ct \geq 0$ und $x + ct \leq L$) :

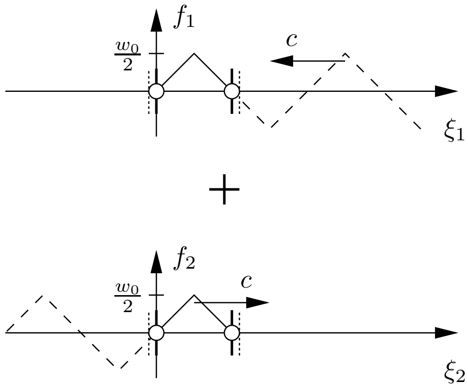
$$w(x,t) = \frac{1}{2}w_A(x-ct) + \frac{1}{2}w_A(x+ct) \tag{55}$$

Die beiden sich überlagernden Wellen f_1 und f_2, haben also die gleiche Form wie die Anfangsauslenkung aber nur ihren halben Betrag.

Allgemeines zu den Rändern: An einem festen Rand bleibt die Auslenkung immer Null. Eine Welle wird umgekehrt reflektiert. Das sieht so aus, wie in der folgenden Skizze angedeutet: Eine inverse Welle bewegt sich von hinter dem Rand genau symmetrisch zur ankommenden Welle, beide durchdringen den Rand und überlagern sich. Dadurch bleibt die Auslenkung am Rand in der Summe immer Null. Schließlich ist die ankommende Welle ganz hinter dem Rand verschwunden und die zurücklaufende inverse Welle ist das reale Resultat vor dem Rand. (Gestrichelt sind die sich überlagernden Teilwellen, durchgezogen ihre Summe.)



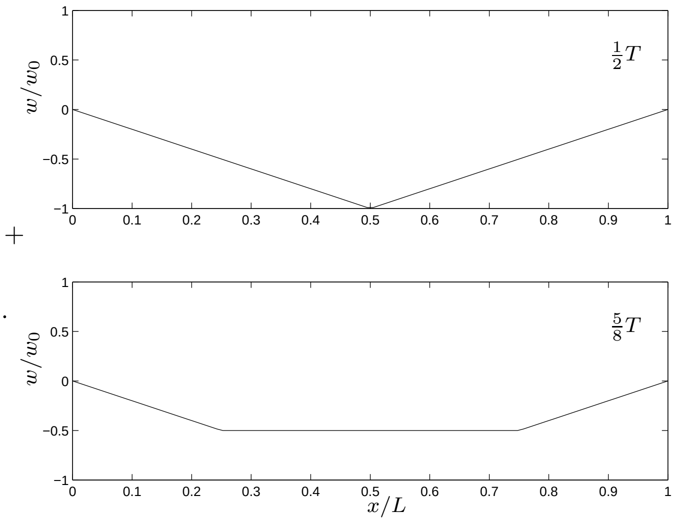
In dieser Aufgabe überlagern sich eine links- und eine rechtslaufende Welle ungefähr wie in der folgenden Skizze dargestellt: (Durchgezogen ist der reale Teil zwischen den Rändern, gestrichelt der erst noch durch Reflexion in den realen Bereich einwandernde Teil.)



Diese Überlegungen führen dazu, daß Gleichung (55) die allgemeine Lösung des Anfangsrandwertproblems darstellt, wenn w_A periodisch mit Vorzeichenwechsel über die Ränder hinaus fortgesetzt wird.

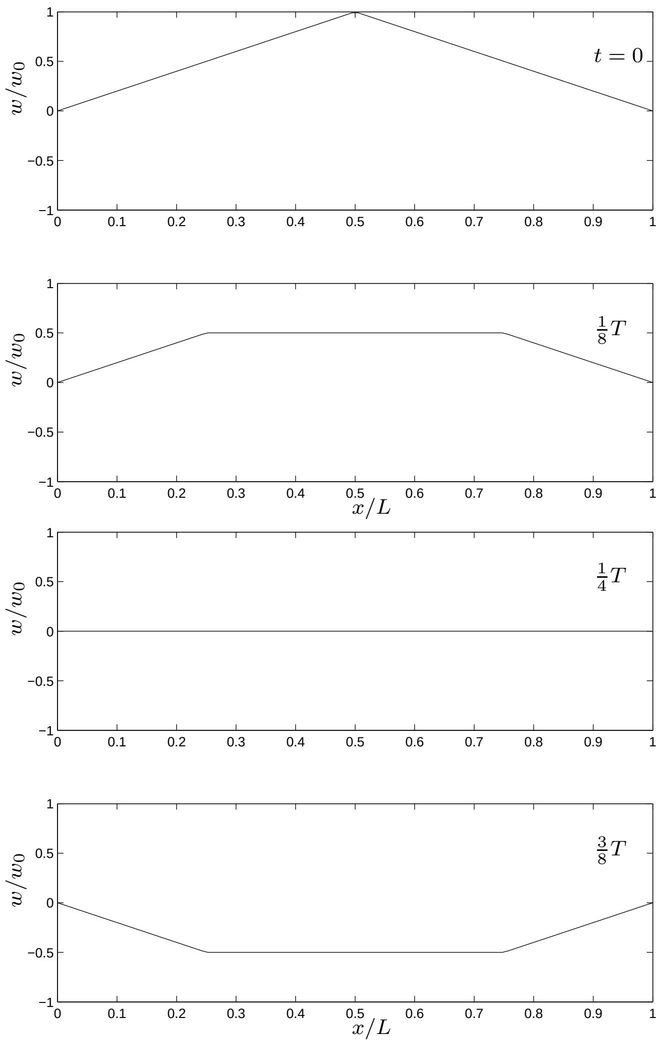
Wenn man z.B. $[-\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}]$ als Grundintervall betrachtet, lässt sich die Funktion wie folgt definieren:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = \frac{w_0}{L}\left\{ \begin{array}{cc} x-ct, & -\frac{L}{2} \le x-ct+2nL < \frac{L}{2} \\ L-(x-ct), & \frac{L}{2} \le x-ct+2nL < \frac{3L}{2} \end{array} \right\} + \\
+ \frac{w_0}{L}\left\{ \begin{array}{cc} x+ct, & -\frac{L}{2} \le x+ct+2nL < \frac{L}{2} \\ L-(x+ct), & \frac{L}{2} \le x+ct+2nL < \frac{3L}{2} \end{array} \right\}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$



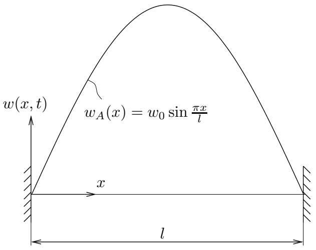
Dabei ist $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Mit $T = \frac{2L}{c}$ und $c^2 = \frac{S_0}{\rho A_0}$:



Aufgabe 10

Eine Saite der Länge l wird mit S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x)$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ sowohl mit dem Produktansatz von Bernoulli als auch mit dem Ansatz nach d'Alembert. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:



I. Ansatz nach d'Alembert:

(a) Wie lautet der Ansatz nach d'Alembert?

(b) Leiten Sie den Ansatz nach der Zeit ab und setzen Sie die Anfangsbedingungen ein. Lösen Sie die beiden Gleichungen für den Zeitpunkt $t = 0$.

(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems? Wie müssen entsprechend die Teilwellen fortgesetzt werden, damit eine Lösung den Randbedingungen genügt?

(d) Geben Sie die Gesamtlösung des Problems, also $w(x,t)$, an.

II. Ansatz nach Bernoulli:

(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung?

(b) Verwenden Sie für die weitere Berechnung den Produktansatz von Bernoulli $w(x) = X(x) \cdot T(t)$ und formen Sie die partielle Differentialgleichung derart um, daß zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen entstehen.

Für die weitere Berechnung benutzen Sie bitte die Lösungsansätze
$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$ und $T(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$

(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems?

(d) Setzen Sie den Lösungsansatz in die Randbedingungen ein und berechnen Sie die Frequenzgleichung. Bestimmen Sie die Lösung der Frequenzgleichung und damit die Eigenkreisfrequenzen.

(e) Werten Sie nun auch die Anfangsbedingungen mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen aus.

Geg.: S, μ, l, $c^2 = \frac{S}{\mu}$, $w(x,t=0) = w_0 \sin\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

Teil I

Das Problem wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{57}$$

beschrieben. Zur Lösung soll der Ansatz von d'Alembert

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{58}$$

benutzt werden. Dieser hat die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned}\dot{w}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} w(x,t)\\ &= \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\ &= -cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct). \end{aligned}\tag{59}$$

Dabei sind

$$f_1' := \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)} \text{und} \tag{60}$$

$$f_2' := \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}. \tag{61}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden aus den Anfangsbedingungen

$$w(x,t=0) = w_0 \sin\frac{\pi x}{l} =: w_A(x), \tag{62}$$

$$\dot{w}(x,t=0) = 0 \tag{63}$$

bestimmt.

Aus (59) → (63) erhält man:

$$\begin{aligned}\dot{w}(x,t) &= \left[-cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct)\right]_{t=0} = 0\\ &\Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) = 0\end{aligned}\tag{64}$$

und durch Integration über x:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2A. \tag{65}$$

Dabei ist $2A$ eine Integrationskonstante.
Analog ergibt sich aus (58) → (62):

$$\begin{aligned}w(x,t=0) &= \left[f_1(x-ct) + f_2(x+ct)\right]_{t=0}\\ &= f_1(x) + f_2(x) = w_A(x).\end{aligned}\tag{66}$$

Aus (65) + (66) folgt

$$f_1(x) = \frac{1}{2}w_A(x) + A. \tag{67}$$

und analog aus (66) - (65)

$$f_2(x) = \frac{1}{2}w_A(x) - A. \tag{68}$$

Setzt man nun (67) und (68) in (58) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}w(x,t) &= \frac{1}{2}\left[w_A(x-ct) + w_A(x+ct)\right]\\ &= \frac{w_0}{2}\left[\sin\frac{\pi}{l}(x-ct) + \sin\frac{\pi}{l}(x+ct)\right],\ 0 \le x-ct, x+ct \le l\end{aligned}\tag{69}$$

Die Anfangsauslenkung w_A spaltet sich in zwei Wellen mit halber Amplitude auf, die in entgegengesetzte Richtungen die Saite entlang laufen. Diese Lösung ist nur gültig, solange die Wellen die Ränder nicht berühren. Eine allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung der Randbedingungen. Die Saite ist an beiden Ende fest eingespannt, daher gilt:

$$w(x=0,t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x=l,t) = 0. \tag{70}$$

Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn an den Rändern Wellen gleicher Form aber mit umgekehrten Vorzeichen und entgegengesetzter Laufrichtung reflektiert werden. Das wird erreicht, wenn die Lösung periodisch mit wechselndem Vorzeichen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Diese Bedingung wird bereits durch Fortsetzung der Sinus-Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ erfüllt. Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$w(x,t) = \frac{w_0}{2}\left[\sin\frac{\pi}{l}(x-ct) + \sin\frac{\pi}{l}(x+ct)\right]. \tag{71}$$

Die Saite schwingt mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2l}{c}. \tag{72}$$

Teil II

Wie üblich werden die Abkürzungen

$$\mathrm{c}_{\boxtimes} := \cos\boxtimes \tag{73}$$

$$\mathrm{s}_{\boxtimes} := \sin\boxtimes \tag{74}$$

mit dem Platzhalter $\boxtimes$ benutzt.

(a)

$$w(x,t) = (A\mathrm{c}_{\omega t} + B\mathrm{s}_{\omega t})(C\mathrm{c}_{\frac{\omega}{c}x} + D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}x}) \tag{75}$$

Die Randbedingungen lauten 1. $w(x=0,t)=0$ und 2. $w(x=l,t)=0$. Sie müssen für alle Zeiten gelten, d.h.

$$0 = (C\mathrm{c}_{\frac{\omega}{c}0} + D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}0}) \tag{76}$$
$$0 = C + 0 \tag{77}$$
$$0 = C \tag{78}$$

Die erste Randbedingung liefert also $C = 0$. Mit diesem Ergebnis und der zweiten Randbedingung gilt:

$$0 = D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}l} \tag{79}$$
$$0 = \mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}l} \tag{80}$$

Damit ergeben sich die k Eigenfrequenzen aus:

$$\left\{\frac{\omega}{c}l\right\}_k = k\pi \quad \text{für } k = 1,2,...,\infty \tag{81}$$
$$\omega_k = k\frac{c}{l}\pi \tag{82}$$

(b) Die Lösung lautet also mit den Eigenfrequenzen von oben:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\mathrm{c}_{\omega_k t} + B_k\mathrm{s}_{\omega_k t})\mathrm{s}_{\frac{\omega_k}{c}x} \tag{83}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\mathrm{c}_{\omega_k t} + B_k\mathrm{s}_{\omega_k t})\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} \tag{84}$$

Diese Lösung wird nun an die Anfangsbedingungen 1. $w(x,t=0) = w_A$ und 2. $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$ angepasst. Die erste Anfangsbedingung liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} = w_0\mathrm{s}_{1\pi\frac{x}{l}} \tag{85}$$
$$\xrightarrow{\text{Orthogonalität}} A_1 = w_0 \quad \text{und } A_k = 0 \quad \forall k\backslash\{1\} \tag{86}$$

Dieses Ergebnis und die zweite Anfangsbedingung zusammen liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k\omega_k\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} = 0 \tag{87}$$
$$\longrightarrow B_k = 0 \quad \forall k \tag{88}$$

Damit ist die spezielle Lösung bekannt. Sie heißt:

$$w(x,t) = w_0\mathrm{c}_{\omega_1 t}\mathrm{s}_{\frac{\omega_1}{c}x} \tag{89}$$
$$= w_0\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}} \tag{90}$$

(c)

$$w(x,t=0) = f_1(\xi_1(x-0t) + f_2(\xi_2 = x+0t) \tag{91}$$
$$w(x,t=0) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\right\} \tag{92}$$
$$w(x,t) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x-ct}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x+ct}{l}}\right\} \tag{93}$$

(d)

$$w(x,t) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}-\pi\frac{ct}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}+\pi\frac{ct}{l}}\right\} \tag{94}$$
$$= \frac{1}{2}w_0\Big\{\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} - \mathrm{c}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{ct}{l}} + ...$$
$$... + \mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} + \mathrm{c}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{ct}{l}}\Big\} \tag{95}$$
$$= w_0\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} \tag{96}$$
$$= X(x)\cdot T(t) \tag{97}$$