Lösung von DGLen mittels Bernoulli-Ansatz

Saiten, Stäbe und Torsionsstäbe

Saitenschwingungen, Longitudinal- und Torsionsschwingungen von Stäben werden alle durch die Wellengleichung beschrieben, allerdings sind die Verformungsgrößen andere und die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten definieren sich unterschiedlich.

$$\ddot{\xi} = c^2 \xi'' \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{1}$$

Saite	$\xi = w(x,t)$	Querauslenkung der Saite
	$c^2 = \frac{S}{\mu}$	mit S als Vorspannkraft und μ als Massenbelegung
Stab	$\xi = u(x,t)$	Longitudinalverschiebung des Stabes
	$c^2 = \frac{E}{\rho}$	mit E als Elastizitätsmodul und ρ als Dichte
Torsionsstab	$\xi = \theta(x,t)$	Torsionswinkel des Stabes
	$c^2 = \frac{G}{\rho}$	mit G als Schubmodul und ρ als Dichte

Mit Hilfe des Separationsansatzes

$$\xi(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{2}$$

erhält man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{3}$$

mit der allg. Lösung

$$T(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \tag{4}$$

$$X'' + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0 \tag{5}$$

mit der allg. Lösung

$$X(x) = A \sin(\frac{\omega}{c} x) + B \cos(\frac{\omega}{c} x) \tag{6}$$

und den Konstanten A, B, C und D. Da ein Kontinuum unendlich viele Eigenkreisfreuquenzen ω_i besitzt, ergibt sich die allgemeine Gesamtlösung zu

$$\xi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)\right) \left(A_i \sin(\frac{\omega_i}{c} x) + B_i \cos(\frac{\omega_i}{c} x)\right) \tag{7}$$

Auswerten der Rand- und Anfangsbedingungen liefert sowohl alle Konstanten als auch die Eigenkreisfrequenzen ω_i.

Balken

Die Balkenbiegedifferentialgleichung lautet

$$\ddot{w}(x,t) = -\frac{EI}{\rho A} w''''(x,t) \tag{8}$$

Nach Separation mit Hilfe des Ansatzes $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ ergeben sich die gewöhnlichen DGLn:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad , \quad X'''' - \underbrace{\frac{\omega^2 \rho A}{EI}}_{=:\kappa^4} X = 0 \tag{9}$$

Die Orts-DGL ist 4. Ordung, daher ergibt sich eine viergliedrige allgemeine Lösung mit vier Konstanten. Zur Bestimmung der Frequenzgleichung werden vier Randbedingungen benötigt.

$$X(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x + C \cosh \kappa x + D \sinh \kappa x \tag{10}$$

Vorgehen zur Lösung mittels Bernoulli-Ansatz

1. Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichung
2. Separationsansatz → zwei gewöhnliche DGLn
3. Finde (oder kenne) die allgmeinen Lösungen der gewöhnlichen DGLn
4. Anpassen der allg. Lösung der Orts-DGL an die Randbedingungen liefert die Frequenzgleichung
5. Auswerten der Lösung der Orts-DGL für einzelne Frequenzen liefert die Eigenformen
6. Bei Bedarf: Anpassen der Gesamtlösung an die Anfangsbedingungen