Klausur - Statik und elementare Festigkeitslehre - WiSe 2012/13

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser umrahmte Bereich ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

Nachname	______________	Vorname	______________
Studiengang	______________	Matrikelnummer	______________
Art der Klausur:		◯ Prüfungsklausur	◯ Übungsscheinklausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ 1 - 7	Kurzfragenteil	Sichtung
Punkte								/ 80	/ 20	

Die Klausur umfasst sieben Rechenaufgaben und einen Kurzfragenteil. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 40 von 100 Punkten erreicht werden, jedoch muss dabei der Kurzfragenteil mit mind. 10 von 20 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des Kurzfragenteils **direkt auf dem Klausurblatt** ein (**nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!**). Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet.

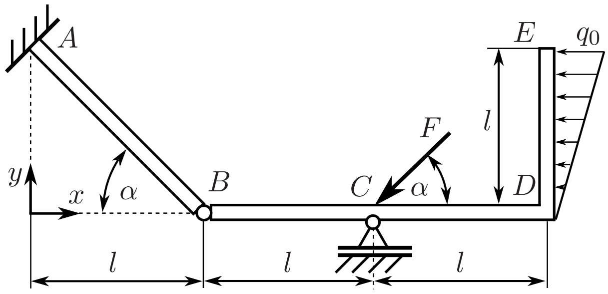
1 Auflagerreaktionen 2+4+4 = 10 Punkte

Das gezeigte System besteht aus zwei im Punkt B gelenkig miteinader verbundenen starren Trägern. Zur Kopplung an die Umgebung dienen die feste Einspannung in A und ein Loslager in C, wo außerdem eine schräg gerichtete Einzellast $F = \sqrt{2}q_0 l$ angreift. Zusätzlich wird das Tragwerk im Abschnitt $\overline{DE}$ durch eine horizontal gerichtete, linear verlaufende Streckenlast mit dem Maximalwert q_0 belastet.

(a) Geben Sie den Betrag und die Koordinate des Kraftangriffspunktes y_{res} der Resultierenden der Streckenlast an.

(b) Fertigen Sie einen Freischnitt an und bestimmen Sie die Gelenkkräfte in B sowie die Lagerkraft in C.

(c) Fertigen Sie einen weiteren Freischnitt an und bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A.



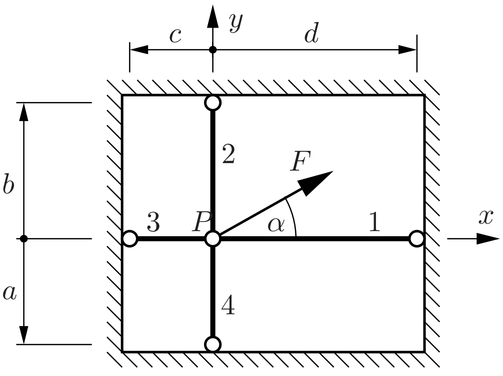
Gegeben: q_0, $F = \sqrt{2}q_0 l$, l, $\alpha = 45°$

2 Bekannte Aufgabe 1 8+2 = 10 Punkte

Das skizzierte System aus vier elastischen Stäben wird im zentralen Knoten P mit der Last F in der angegebenen Richtung belastet. Alle Bauteile haben den Elastizitätsmodul E und einen quadratischen Querschnitt mit der Kantenlänge D. Die Bezeichnungen der Längen sind der Skizze zu entnehmen.

(a) Bestimmen Sie die x- und y-Komponenten der Verschiebung des Punktes P. Die Verschiebung soll klein und Knicken ausgeschlossen sein.

(b) Wie groß muss α sein, damit sich der Punkt P um den gleichen Betrag in x- und in y- Richtung verschiebt?



Gegeben: $a, b, c, d, D, F, \alpha, E$

3 Fachwerk 1+3+4+4+4 = 16 Punkte

Das gezeigte Fachwerk besteht aus 13 gelenkig verbundenen Stäben. Es ist im Punkt A durch ein Festlager und im Punkt B durch eine Pendelstütze gelagert. Das System wird durch zwei Einzelkräfte F belastet, die in den Punkten C und D angreifen. In D ist zusätzlich ein undehnbares Seil befestigt, welches über reibungsfreie Umlenkrollen geführt wird und mit der Kraft $2F$ belastet ist. Der Radius der Umlenkrollen ist zu vernachlässigen.

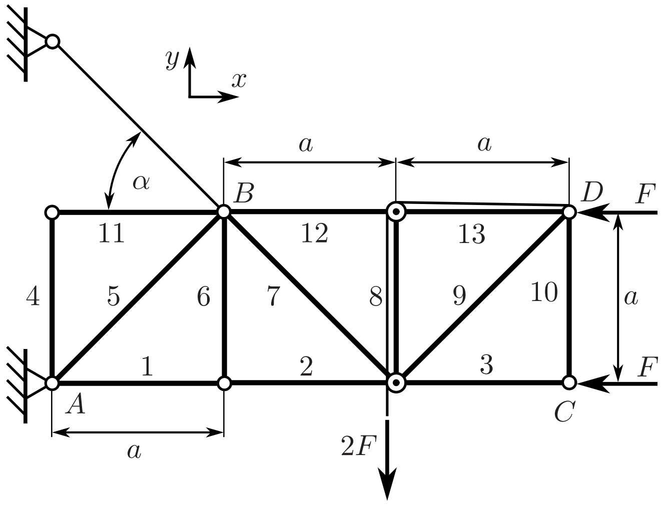
(a) Prüfen Sie die *notwendige* und die *hinreichende* Bedingung für statische Bestimmtheit.

(b) Identifizieren Sie alle offensichtlichen Nullstäbe (Falsche Nullstäbe führen zu Punktabzug in Teilaufgabe (b)).

(c) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A und die Kraft der Pendelstütze bei B.

(d) Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben 2, 7 und 12 mit dem RITTERschen Schnittverfahren.

(e) Bestimmen Sie die restlichen Stabkräfte. Geben Sie für *diese* Stäbe jeweils an, ob sie auf *Zug* oder *Druck* beansprucht werden.



Gegeben: F, a, $\alpha = 45°$

4 Bekannte Aufgabe 2 2+4+3+1 = 10 Punkte

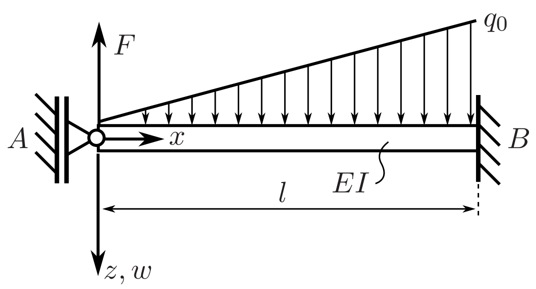
Der abgebildete Balken der Länge l ist rechts fest eingespannt und links über ein Loslager an die Umgebung gekoppelt. Das System wird durch eine *linear* verlaufende Streckenlast $q(x)$ mit dem Maximalwert q_0 und eine Kraft F belastet. Zur Vordimensionierung des Balkens sind die folgenden Teilaufgaben zu lösen.

(a) Geben Sie die Differentialgleichung für die Durchsenkung $w(x)$ des Balkens an.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung für diesen Lastfall und geben Sie die Randbedingungen an. Ordnen Sie diese zusätzlich nach *geometrischen* und *dynamischen* Randbedingungen.

(c) Bestimmen Sie die unbekannten Konstanten und den Verdrehwinkel φ_A im Lager A.

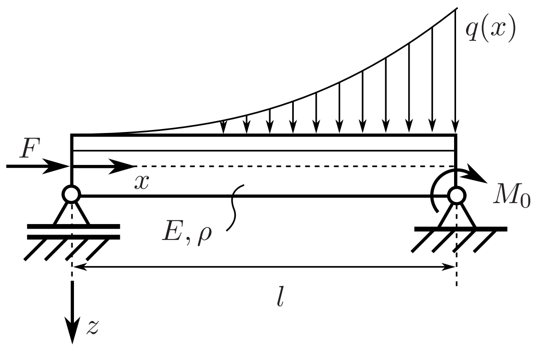
(d) Wie muss die Kraft F gewählt werden, damit die Durchsenkung $w(0) = 0$ wird?



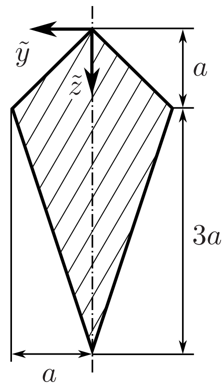
Gegeben: F, EI, q_0, l

$\boxed{5}$ FTM, Biegespannung — 4+4+5+4 = 17 Punkte

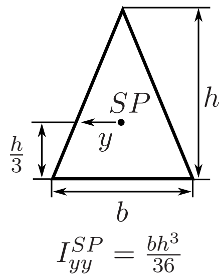
Der skizzierte, längshomogene Balken ist beidseitig gelenkig gelagert und durch eine quadratisch verlaufende Streckenlast $q(x) = \frac{q_0}{l^2}x^2$ belastet. Zusätzlich greifen an den Rändern die Einzelkraft F und das Moment $M_0 = \frac{q_0}{12}l^2$ an. Das Querschnittsprofil des Balkens besitzt die unten dargestellte symmetrische Form und ist über die gesamte Länge l konstant. Zur Auslegung des Bauteils sind die unten aufgeführten Teilaufgaben zu bearbeiten.



Querschnitt:



Hinweis:



$I_{yy}^{SP} = \frac{bh^3}{36}$

(a) Bestimmen Sie die Flächenschwerpunktskoordinate $\tilde{z}_s$ im eingezeichneten $\tilde{y}, \tilde{z}$-Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment I_{yy} bezüglich des Flächenschwerpunktes.

(c) Berechnen Sie das Biegemoment $M(x)$ und skizzieren Sie dessen *Verlauf* über x mit Angabe charakteristischer Werte.

Bitte beachten: Verwenden Sie im Folgenden die Näherungen $\tilde{z}_s = 2a$, $I_{yy} = 3a^4$.

(d) Bestimmen Sie zunächst die Normalspannung an der Stelle $x = l$ in Abhängigkeit der noch unbekannten Kraft F und dem Schwerpunktsabstand z. Geben Sie nun den Mindestwert für F an, so dass an der Stelle $x = l$ im gesamten Querschnitt gerade Druckspannung herrscht.

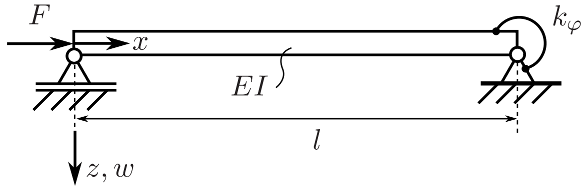
Gegeben: $q(x) = \frac{q_0}{l^2}x^2$, $M_0 = \frac{q_0}{12}l^2$, l, a, E

$\boxed{6}$ Knicken — 2+7 = 9 Punkte

Der skizzierte Stab ist gelenkig gelagert und durch die Kraft F auf Druck belastet. Zusätzlich befindet sich an der Stelle $x = l$ eine lineare Drehfeder mit der Steifigkeit k_φ. Zur Untersuchung der Stabilität gegen Knicken sind die folgenden Teilaufgaben zu bearbeiten:

(a) Geben Sie die EULERsche Differentialgleichung für den Knickstab und deren allgemeine Lösung an.

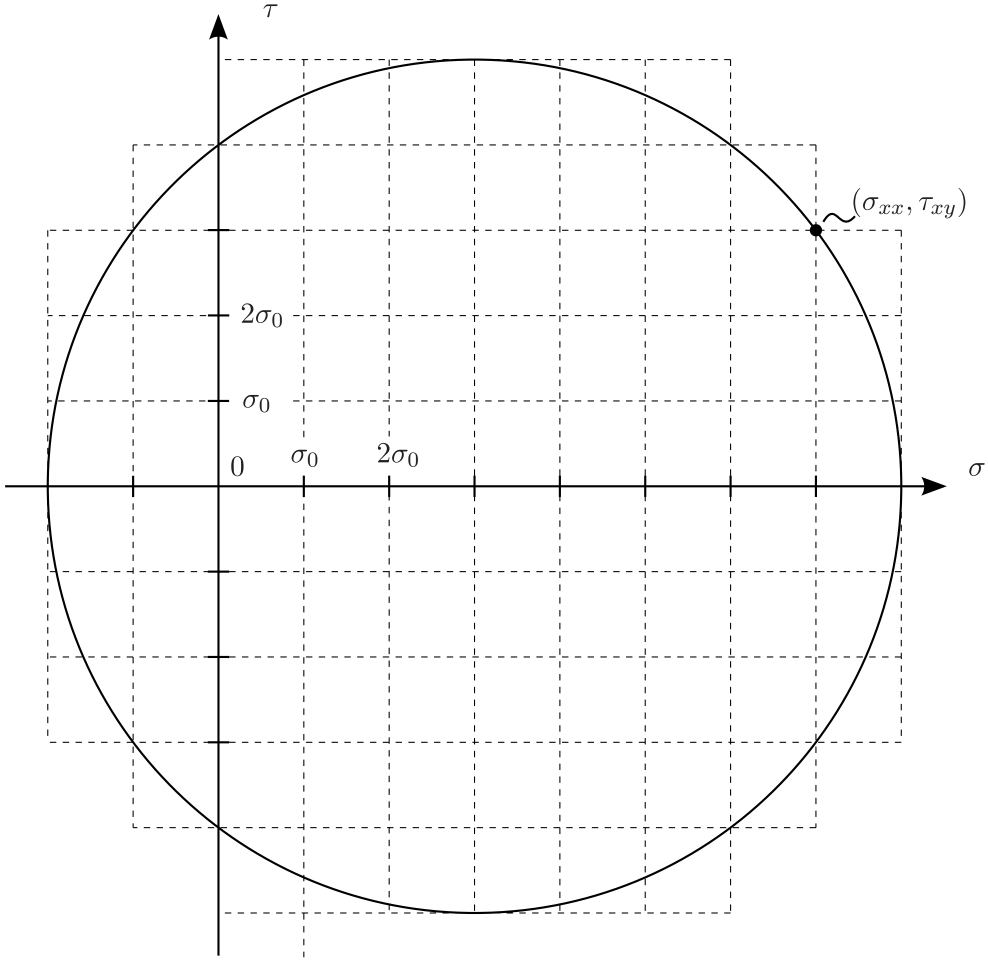
(b) Formulieren Sie die Randbedingungen für das System und bestimmen Sie daraus die Eigenwertgleichung zur Berechnung der kritischen Last (Die kritische Last muss *nicht* bestimmt werden!).



Gegeben: EI, F, l, k_φ

$\boxed{7}$ Mohrscher Spannungskreis 1+2+2+3 = 8 Punkte

Der gezeigte MOHRsche Spannungskreis dient der Darstellung und Untersuchung eines ebenen Spannungszustandes, für den der zugehörige Punkt (σ_{xx}, τ_{xy}) bereits in den Kreis eingetragen ist. Die folgenden Teilaufgaben sollen mit Hilfe des MOHRschen Spannungskreises und der unten gegeben Größen beantwortet werden (Lesen Sie ab und zeichnen Sie ein!)



(a) Bestimmen Sie durch Ablesen den Spannungstensor $\underline{\sigma}$ bezüglich der Koordinaten (x, y).

(b) Bestimmen Sie graphisch die Hauptspannungen σ_1, σ_2 und die maximale Schubspannung τ_{max}.

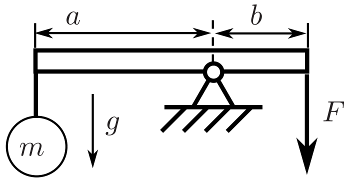
(c) Geben Sie einen Ausdruck für den Winkel φ^* an, unter dem die Hauptspannungen σ_1, σ_2 auftreten und bestimmen Sie hiermit φ^*.

(d) Geben Sie *einen* Winkel $\hat{\varphi}$ an, für den eine der Normalspannungen verschwindet. Geben Sie zusätzlich den Spannungstensor bezüglich der um $\hat{\varphi}$ gedrehten Koordinaten (ξ, η) an und kennzeichnen Sie den zugehörigen Punkt im MOHRschen Spannungskreis.

Gegeben: σ_0, $\tan 37° \approx 3/4$

Theorieaufgaben **20 Punkte**

1. An dem skizzierten, masselosen, reibungsfrei gelenkig gelagerten Hebel greift rechts die Kraft $F = 3mg$ an. Welches Hebelverhältnis $\frac{a}{b}$ muss erfüllt sein, damit die Kraft das Gewicht der Masse m in Ruhe hält?



$\frac{a}{b} =$

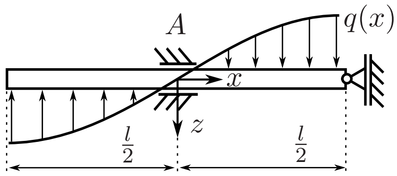
Gegeben: m, g, $F = 3mg$ **1 Punkt**

2. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten N, 1, kg, m und s an:

Gewichtskraft	G	
Streckenlast	q_0	
Biegemoment	$M(x)$	
Schwerpunktskoordinate	x_{sp}	

1 Punkt

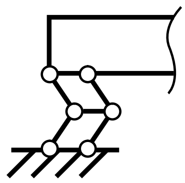
3. Ein starrer Balken der Länge l ist wie gezeigt durch eine Schiebehülse und ein Loslager gelagert. Geben Sie für die eingezeichnete, sinusförmige Streckenlast $q(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ die Lagerkraft A_z im Punkt A in z-Richtung an.



$A_z =$

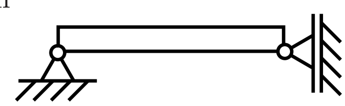
Gegeben: l, $q(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ **1 Punkt**

4. Welche Lagerwertigkeit besitzt das nebenstehend skizzierte, ebene Lager?



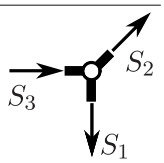
1 Punkt

5. Ein starrer Balken sei in der gezeigten Weise an seinen beiden Enden gelenkig gelagert. Ist das System statisch bestimmt (Begründen Sie!)?



1 Punkt

6. Für den gezeigten Freischnitt des Knotens wurde die Kraft S_3 zu -5 kN ermittelt. Wie ist der zugehörige Stab belastet (Kreuzen Sie an!)?



Zugstab ○ Druckstab ○ Nullstab ○

Gegeben: $S_3 = -5$ kN **1 Punkt**

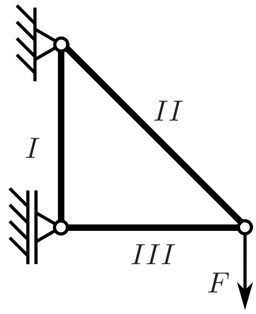
7. In einem Balken der Länge l wirkt die Querkraft $Q(x) = q_0 \frac{2l}{\pi}\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)$. Geben Sie die zugehörige Streckenlast $q(x)$ an.

$q(x) =$

Gegeben: l, q_0, $Q(x) = q_0 \frac{2l}{\pi}\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)$ **1 Punkt**

---

8. Das gezeigte ideale Fachwerk besteht aus drei gelenkig gelagerten Stäben und ist durch die Kraft F belastet. Kennzeichnen Sie die jeweilige Belastungsart in den drei Stäben (Kreuzen Sie an!).



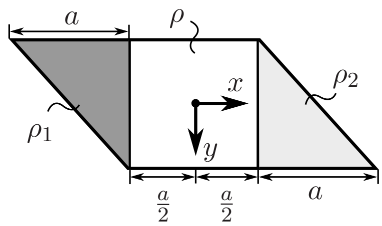
Stab	Zugstab	Druckstab	Nullstab
I	○	○	○
II	○	○	○
III	○	○	○

Gegeben: F **1 Punkt**

---

9. Ein technisches Bauteil konstanter Dicke d ist aus einem quadratischen und zwei dreicksförmigen Teilkörpern zusammengesetzt. Welche Aussagen über den Gesamtmasseschwerpunkt x_s bezüglich des eingezeichneten Koordinatensystems (x, y) in Abhängigkeit der Dichten der beiden Dreiecke ρ_1, ρ_2 sind richtig (Kreuzen Sie an!)?

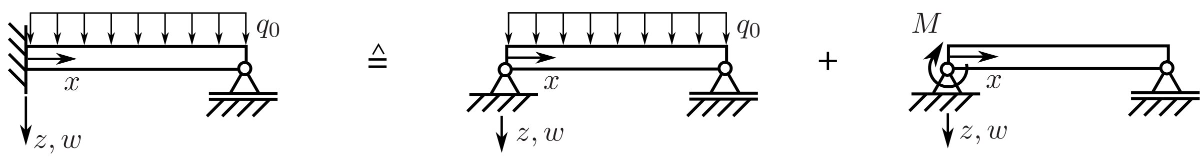
Dichten	$x_s > 0$	$x_s < 0$	$x_s = 0$
$\rho_1 = \rho_2$	○	○	○
$\rho_1 > \rho_2$	○	○	○
$\rho_1 < \rho_2$	○	○	○



Gegeben: a, ρ, ρ_1, ρ_2 **1 Punkt**

---

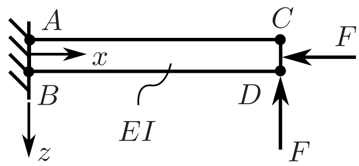
10. Das links gezeigte, statisch unbestimmte System soll durch die rechts gezeigte Superposition zweier statisch bestimmter Systeme mit noch unbestimmtem Moment M gleichwertig ersetzt werden. Wie lautet die korrekte, geometrische Verträglichkeitsbedingung?



Gegeben: l, q_0 **1 Punkt**

---

11. Ein links fest eingespannter Balken ist wie gezeigt durch zwei Einzelkräfte belastet. An welchem Punkt herrscht die größte Druckspannung (Kreuzen Sie an!)?



A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Gegeben: EI, F **1 Punkt**

12. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten N, 1, kg, m und s an:

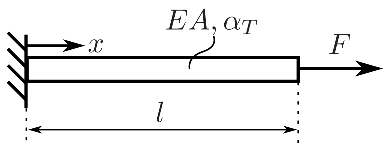
Elastizitätsmodul	E	
Querkontraktionszahl	ν	
Krümmung der Durchsenkung	$w''(x)$	
Deviationsmoment	I_{yz}	

1 Punkt

---

13. Ein ideal elastischer Balken der Länge l ist wie gezeigt links fest eingespannt und rechts mit der Kraft F auf Zug belastet. Bestimmen Sie die Temperaturänderung ΔT, so dass die Dehnung des Stabes ε gerade Null ist.

$\Delta T =$

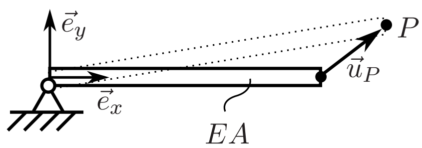


Gegeben: l, EA, α_T, F **1 Punkt**

---

14. Für den gezeigten Dehnstab sei die Verschiebung $\vec{u}_P = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y$ des Punktes P bekannt. Geben Sie die Verlängerung Δl des Stabes unter der Annahme kleiner Verformungen an.

$\Delta l =$



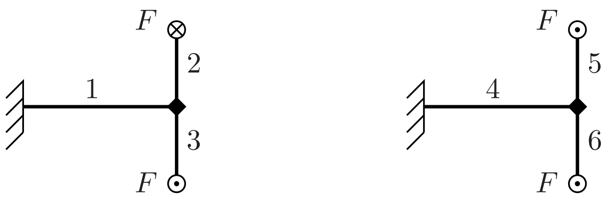
Gegeben: EA, $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y$ **1 Punkt**

---

15. Das skizzierte Bauteil ist auf der linken Seite fest eingespannt. Es sollen die zwei dargestellten Belastungsfälle betrachtet werden. Geben Sie an, welche Bereiche auf Biegung, und welche auf Torsion beansprucht werden (Tragen Sie ein!).

Biegung:

Torsion:

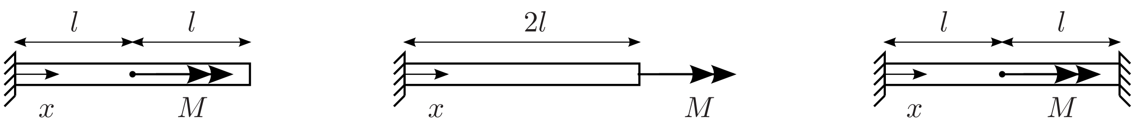


Gegeben: F **1 Punkt**

---

16. Eine Welle (Torsionssteifigkeit GI_p, Länge $2l$) wird unterschiedlich gelagert und belastet. Geben Sie die Relation der Torsionsfedersteifigkeiten c_i der drei dargestellten Fälle an (Tragen Sie ein!).

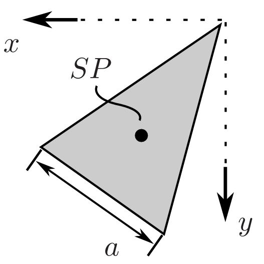
Fall 1: $M = c_1\theta(l)$ Fall 2: $M = c_2\theta(2l)$ Fall 3: $M = c_3\theta(l)$



Tragen Sie c_1, c_2 und c_3 ein: $\boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$

Gegeben: GI_p, l, M **1 Punkt**

17. Ein Körper mit der Form eines gleichschenkligen Dreiecks befindet sich in der gezeigten Position im (x, y)-Koordinatensystem. Skizzieren Sie das zugehörige (ξ, η)-Hauptachsensystem. Geben Sie außerdem das zugehörige Deviationsmoment $I_{\xi\eta}$ an.

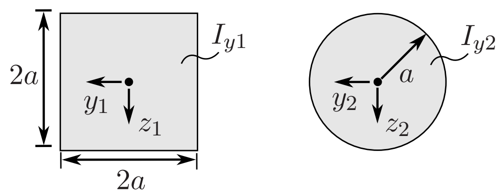


$I_{\xi\eta} =$

Gegeben: a **1 Punkt**

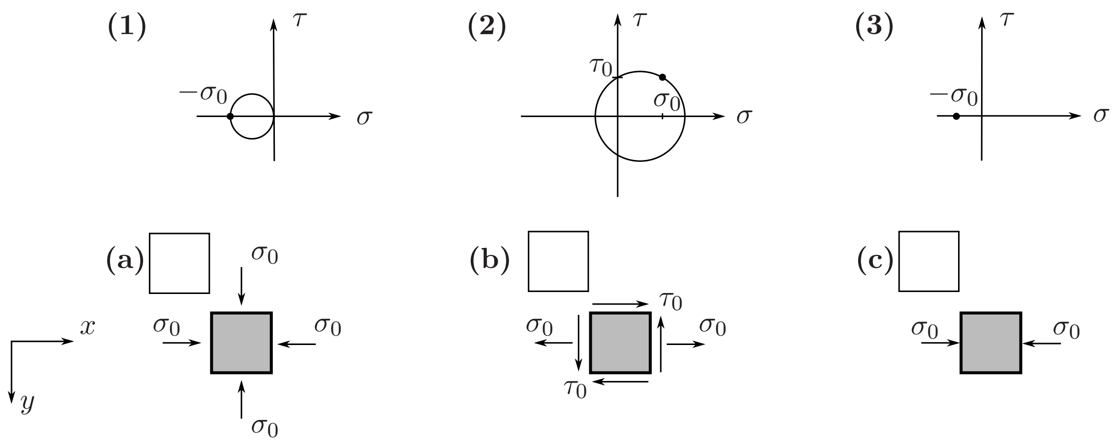
18. Geben Sie das Verhältnis $(=, <, >)$ der Flächenträgheitsmomente I_{yi} bezüglich der jeweiligen Schwerpunkte der beiden unten dargestellten Körper an (Tragen Sie ein!).

I_{y1} $\boxed{}$ I_{y2}



Gegeben: a **1 Punkt**

19. Ordnen Sie die drei gegebenen Mohrschen Spannungskreise (**(1)**, **(2)**, **(3)**) den ebenen Spannungszuständen (**(a)**, **(b)**, **(c)**) zu (Tragen Sie ein!).



Gegeben: σ_0, τ_0 **1 Punkt**

20. Skizzieren Sie die jeweilige 1. Knick-Eigenform der zwei unten gezeigten Knickstäbe verschiedener Lagerung. Zeichnen Sie zudem jeweils die das Knicken verursachende *Belastung* ein.

Gegeben: $EI = const.$ **1 Punkt**