Auf den folgenden Seiten ist der Aufgabenkatalog für die Energiemethoden der Mechanik abgedruckt, aus dem jede Woche Aufgaben für die Große Übung, die Tutorien und das eigenständige Arbeiten ausgewählt werden. Lösungen zu den Tutoriums- und Hausaufgaben werden ungefähr eine Woche nach Bearbeitung veröffentlicht. Leider schleichen sich manchmal in die veröffentlichten Lösungen Fehler ein. Wir bemühen uns, diese möglichst zügig zu beseitigen. Jeder Student ist aber in erster Linie selbst verantwortlich. Darum selbständig rechnen! Wer gerne noch mehr Aufgaben (mit Musterlösungen) rechnen möchte, sei auf die breite Auswahl an Aufgabenbüchern verwiesen.

Die Aufgaben werden nicht notwendigerweise in der Reihenfolge des Katalogs abgearbeitet.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Gross, Dietmar, Werner Hauger, Walter Schnell und Peter Wriggers: *Technische Mechanik*, Band 4 Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden. Springer, 2. Auflage, 1995. (Neuere Ausgabe) in der Lehrbuchsammlung: 5Lh381.

[2] Gummert, Peter und Karl-August Reckling: *Mechanik*. Science Publications, Hamburg, vierte Auflage, 2000. (Ältere Ausgabe) in der Lehrbuchsammlung: 5Lh296.

[3] Hauger, Werner, Walter Schnell und Dietmar Gross: *Technische Mechanik*, Band 3 Kinetik. Springer, 6. Auflage, 1999. (Neuere Ausgabe) in der Lehrbuchsammlung: 5Lh380.

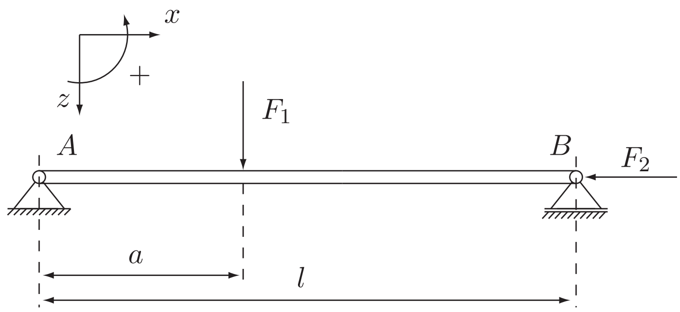
[4] Kuypers, Friedhelm: *Klassische Mechanik*. VCH, zweite Auflage, 1989.

[5] Meyberg und Vachenauer: *Höhere Mathematik 2*. Springer-Verlag, vierte Auflage, 2001. In der Lehrbuchsammlung: 5Lf592.

[6] Ostermeyer: *Mechanik III*. Institut für Mechanik, TU Berlin, 1994.

1 Prinzip der virtuellen Verrückungen

1. Ein Träger der Länge l, der an seinem Ende A zweiwertig und an seinem Ende B einwertig gelagert ist, werde in Stabrichtung in B durch die Kraft F_2 und senkrecht dazu im Abstand a zu A durch die Kraft F_1 belastet. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit bestimme man den im Träger wirkenden

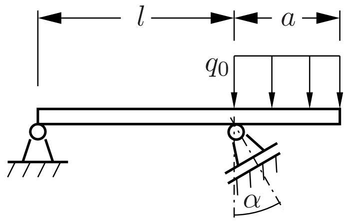


   (a) Normalkraftverlauf $N(x)$,
   (b) den Querkraftverlauf $Q(x)$ und
   (c) den Momentenverlauf $M(x)$

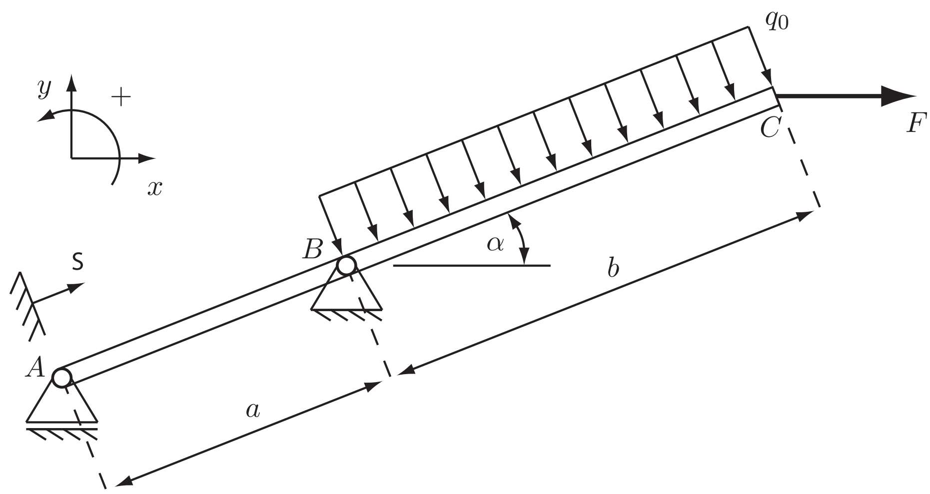
   Geg.: F_1, F_2, l, a

2. Bestimmen Sie mit der Methode der virtuellen Verrückungen für den skizzierten Balken die Lagerreaktionen!

   Geg.: q_0, l, a, α



3. Ein unter dem Winkel $\alpha = 30°$ zur Horizontalen geneigter Träger der Länge $a + b$ ist in A einwertig und in B zweiwertig gelagert. Der Träger wird durch eine im Trägerteil $B - C$ angreifende konstante Streckenlast q_0 sowie durch eine horizontale wirkende Kraft $\underline{F}$ an der Stelle C belastet.



   Man berechne mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit:

   (a) für $q_0 = 0$ die Lagerreaktion A

(b) für $q_0 = 0$ die im Bereich $a \leq s \leq a + b$ des Trägers auftretende

(a) Normalkraft $N(s)$,

(b) Querkraft $Q(s)$ und

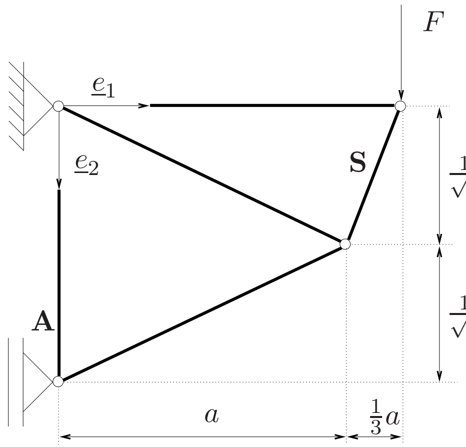
(c) das Biegemoment $M(s)$.

(c) für eine vorgegebene Streckenlast q_0 die im Bereich $a \leq s \leq a+b$ des Trägers auftretende Querkraft $Q(s)$.

Dazu skizziere man jeweils das virtuell verschobene bzw. verdrehte System , stelle die kinematischen Beziehungen auf und werte das Prinzip der virtuellen Arbeit aus.

Geg.: a, b, α, F, q_0

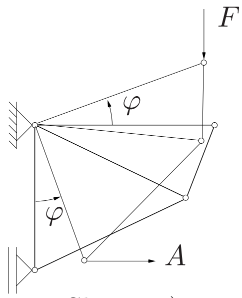
4. Das abgebildete Fachwerk aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet.



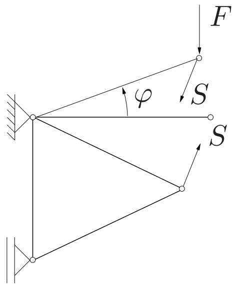
(a) Berechnen Sie mit den Basisvektoren $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ sowie mit Skizze a) die Ortsvektoren $\underline{r}_A$ und $\underline{r}_F$ zu den Angriffspunkten der Kräfte A und F. Berechnen Sie die Variationen $\delta\underline{r}_A$ und $\delta\underline{r}_F$. Berechnen Sie die Lagerkraft A mithilfe des PdvV.

(b) Notieren Sie mit Skizze b) den Ortsvektor $\underline{r}_F = \underline{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S. Berechnen Sie die Variationen $\delta\underline{r}_F$ und $\delta\underline{r}_S$. Berechnen Sie die Stabkraft S mithilfe des PdvV, indem Sie S als äußere Last ansehen.

Hinweis:
$\operatorname{atan} \frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin 30° = \frac{1}{2}$

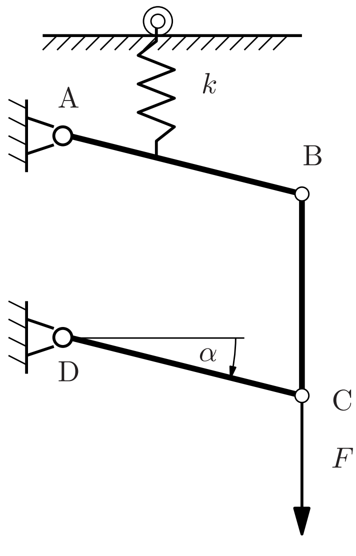


Skizze a)



Skizze b)

5. Ein Gelenkviereck besteht aus drei starren Balken der Länge l. In der Mitte des Balkens AB ist eine Feder der Steifigkeit k angebracht. Die Feder ist stets senkrecht und sei entspannt, wenn $\alpha = 0$ (horizontale Lage der Balken AB und CD).



Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage (Winkel α_G).

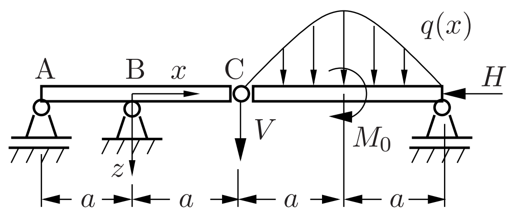
Geg.: F, l, α

6. Das skizzierte Balkensystem ist durch ein Einzelmoment M_0, zwei Einzelkräfte H und V und eine **sinusförmige** Streckenlast mit dem Maximum q_0 belastet. Alle Balken sind starr und masselos.

   Es sind die Auflagerkraft im Lager A und das Schnittmoment im Bereich zwischen dem Lager B und dem Gelenk C mit der Methode der virtuellen Leistungen zu bestimmen.

   Verwenden Sie dabei jeweils eine virtuelle Bewegung, bei der keine andere Auflagerkraft bzw. keine andere Schnittlast als die gesuchte einen Beitrag zur virtuellen Leistung liefert.

   Skizzieren und/oder beschreiben sie jeweils zuerst die virtuelle Bewegung, deren Leistungsbilanz sie danach aufstellen.



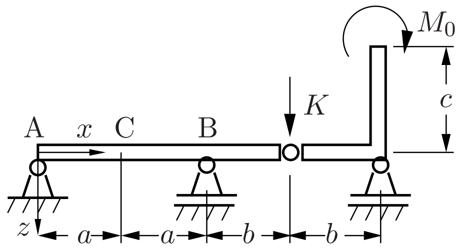
   (a) Bestimmen Sie die Ersatzkraft der Streckenlast $q(x)$ und deren Kraftangriffspunkt.

   (b) Berechnen Sie die Auflagerkraft im Lager A.

   (c) Berechnen Sie das Biegemoment im Bereich zwischen dem Lager B und dem Gelenk C. Verwenden Sie das in die Skizze eingetragene Koordinatensystem!

   Geg.: a, H, V, M_0, q_0

7. Das skizzierte Balkensystem ist durch ein Einzelmoment M_0 und eine Einzelkraft K belastet. Alle Balken sind starr und masselos.

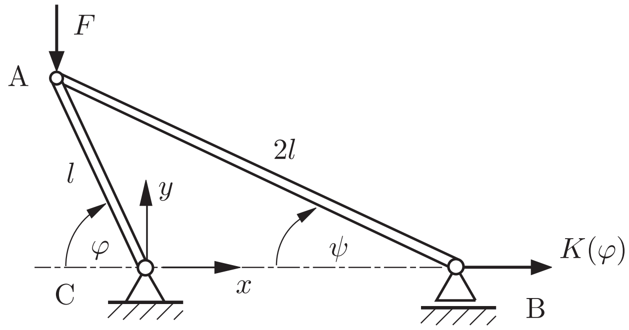


   (a) Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen das Schnittmoment M an der Stelle C ($x = a$).

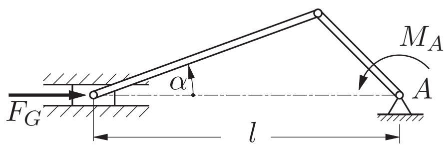
   (b) Bestimmen Sie ebenfalls mit Hilfe des Prinzip der virtuellen Verrückungen die Lagerkraft in B.

   Geg.: a, b, c, K, M_0

8. Die abgebildete Konstruktion aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet und befindet sich im statischen Gleichgewicht. Berechnen Sie mit dem **Prinzip der virtuellen Verrückungen** die Haltekraft K als Funktion des Winkels φ!
   Geg.: F, l

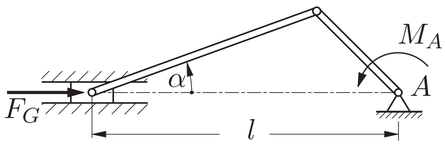


9. Bei einem Kolbenkompressor wirke in der skizzierten Stellung auf die Kolbenfläche die Gaskraft F_G. Wie groß ist das erforderliche Moment M_A, wenn die Reibungskräfte vernachlässigt werden können und statisches Gleichgewicht vorausgesetzt wird?



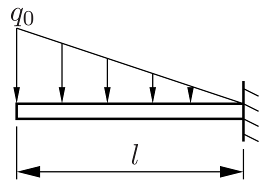
   Geg.: F_G, l, α

10. Bei einem Kolbenkompressor wirke in der skizzierten Stellung auf die Kolbenfläche die Gaskraft F_G. Auf die rechte Stange wirkt das Antriebsmoment M_A. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage (Winkel α), wenn die Reibungskräfte vernachlässigt werden.



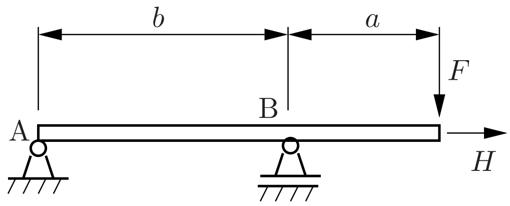
Geg.: F_G, l, M_A

11. Bestimmen Sie mit der Methode der virtuellen Verrückungen für folgenden Kragbalken die Lagerreaktionen.



Geg.: q_0, l

12. Bestimmen Sie für das skizzierte System mit Hilfe der Methode der virtuellen Arbeit / Leistung / Verrückungen

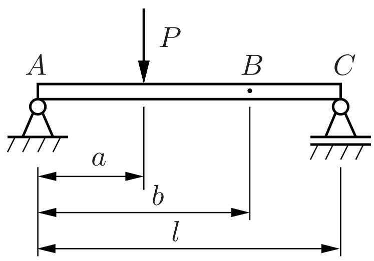


(a) die Lagerkraft im Punkt B

(b) alle Schnittlasten.

Geg.: F, H, a, b

13. Für den durch eine Einzelkraft P belasteten skizzierten Balken ist die Lagerkraft im Punkt C sowie das Schnittmoment im Punkt B mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu bestimmen.

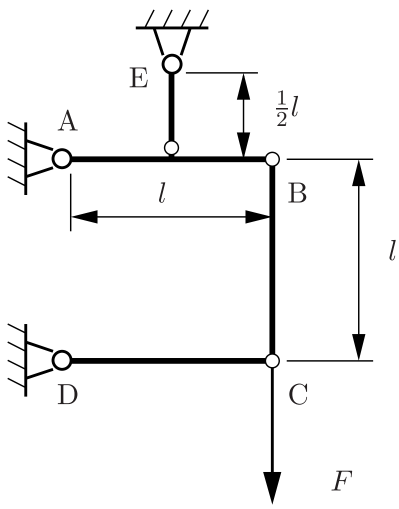


Geg.: P, l, a, b

14. Die abgebildete Konstruktion besteht aus drei starren Balken (AB, BC und CD) und einer Stütze, die in der Mitte des Balkens AB angebracht ist.

Zur Dimensionierung der Stütze soll die Kraft in der Stütze bestimmt werden.

Führen Sie die Berechnungen auf zwei verschiedenen Wegen durch:



(a) Schneiden Sie frei und berechnen Sie die gesuchte Kraft mittels Kräfte- und Momentengleichgewichten.

(b) Nutzen Sie das Prinzip der virtuellen Verückungen zur Bestimmung der gesuchten Kraft.

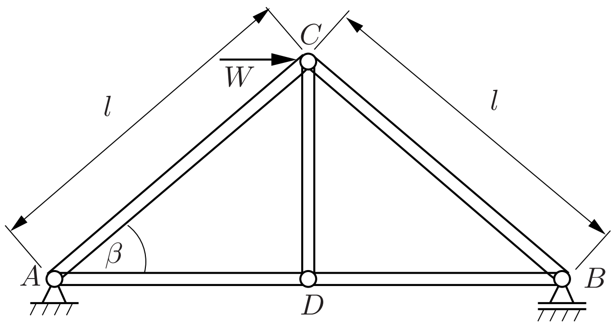
Geg.: F, l

15. Für das aus starren Stäben bestehende skizzierte Fachwerk unter der Belastung W sind folgende Größen mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu bestimmen:

    (a) Die Auflagerkraft im Punkt B,

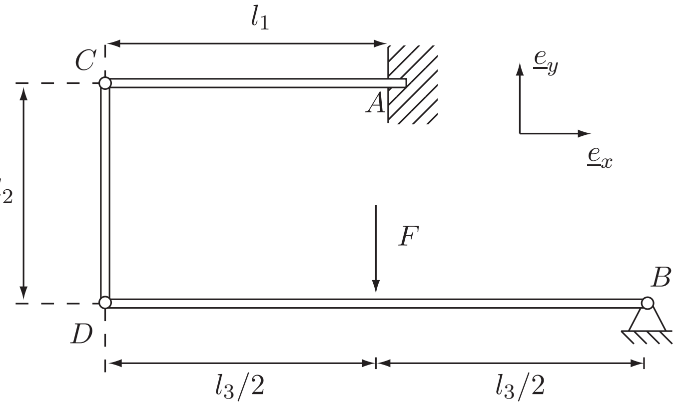
    (b) die Stabkraft S_{BC}.

    Geg.: W, l, β



16. Das skizzierte System besteht aus drei starren Körpern, wird belastet durch die Kraft F und ist statisch bestimmt gelagert. Bestimmen Sie mit Hilfe des <u>Prinzips der virtuellen Arbeit</u> die Lagerreaktionen in A und in B. Skizzieren Sie dazu jeweils das virtuell verschobene bzw. verdrehte System.

    Geg.: l_1, l_2, l_3, F



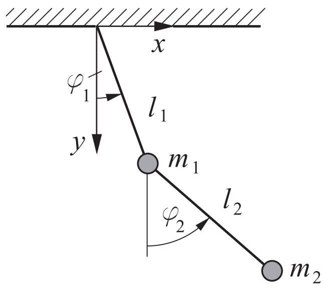
2 Lagrangesche Gleichungen

17. Zwei masselose Stangen (Längen l_1 und l_2) und zwei Punktmassen m_1 und m_2 bilden ein Doppelpendel.

    (a) Bestimme für die Bewegung des skizzierten Doppelpendels in einer vertikalen Ebene (Erdbeschleunigung g) mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen. Nutze die generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2.

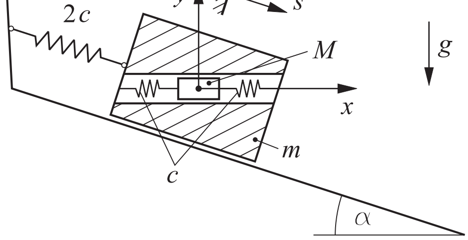
    (b) Wie lauten die Gleichgewichtslagen?

    Geg.: m_1, m_2, l_1, l_2, g

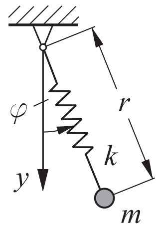


18. Auf einer schiefen Ebene bewegt sich reibungsfrei ein Körper der Masse m, Bewegungskoordinate s, infolge der Schwerkraft abwärts. In einer radialen Bohrung ist ein Zylinder der Masse M, der Relativkoordinate x, elastisch angeordnet, der sich ebenfalls reibungsfrei bewegen kann. Ausgehend von der Ruhelage des Systems sind mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten s und x aufzustellen.

    Geg.: m, M, c, α, g

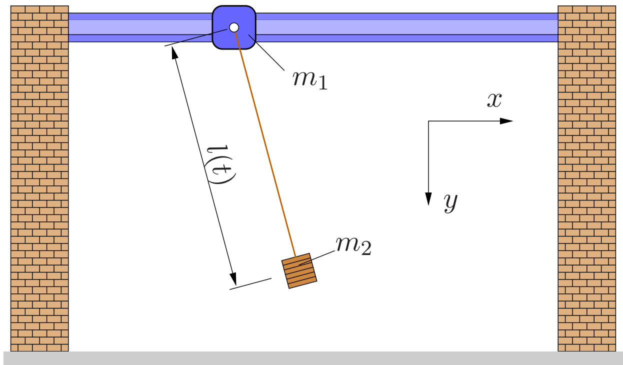


19. Ein Massenpunkt m ist am unteren Ende einer Feder k angebracht. Am oberen Ende ist die Feder gelagert. In spannungloser Ruhelage hat die Feder die Länge r_0.



Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2.Art auf.

Geg.: k, m, r_0, r, φ, g

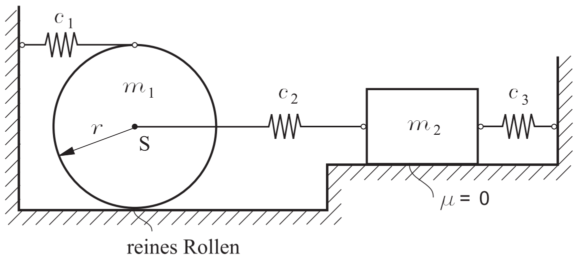
20. 

Die Aufhängevorrichtung eines ebenen Pendels mit der zeitlich veränderlichen Länge $l(t)$ und der Pendelmasse m_2 gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Führung und hat die Masse m_1.

Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Geg.: m_1, m_2, $l(t)$, g

21.

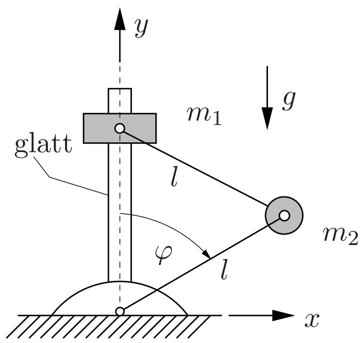


(a) Für das skizzierte System stelle man das Bewegungsdifferentialgleichungssystem auf und schreibe es auf Matrizenform um. Es sollen von vornherein kleine Auslenkungen angenommen werden.

(b) Man berechne die Eigenkreisfrequenzen und die dazugehörigen Eigenformen des Systems.

Geg.: $c_1 = \frac{1}{4}c, \quad c_2 = c_3 = c, \quad m_1 = \frac{2}{3}m, \quad m_2 = m, \quad \Theta_S = \frac{1}{2}m_1 r^2, \quad r$

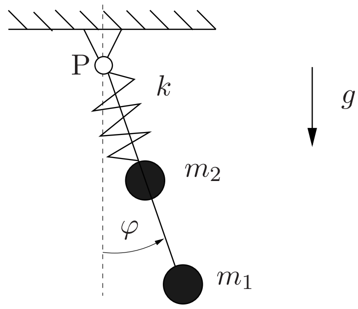
22. Ein starrer Körper (Masse m_1) gleitet reibungsfrei in vertikaler Richtung und ist über eine masselose Stange (Länge l) mit einer Punktmasse m_2 gelenkig verbunden. Die Punktmasse ist über eine weitere Stange (Länge l) gelenkig an die Umgebung gekoppelt.



(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

(b) Bestimme mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichung für das System?

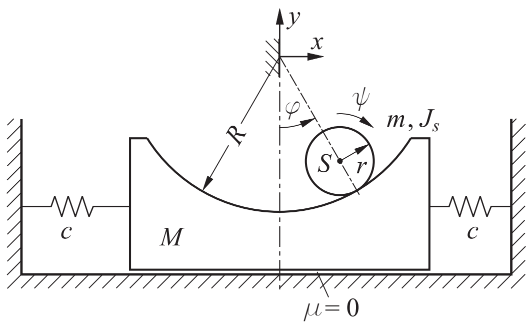
Geg.: l, g, m_1, m_2



23. Eine masselose starre Stange ist am Punkt P aufgehängt. Im Abstand l ist eine Punktmasse m_1 befestigt. Auf der Stange gleitet außerdem eine zweite Punktmasse m_2 reibungslos unter der Wirkung der Federkraft und der Erdanziehungskraft auf und ab. Der Abstand der zweiten Punktmasse vom Aufhängungspunkt P sei mit $r(t)$ bezeichnet. Die Feder hat die Federsteifigkeit k und die unverformte Länge l_0.

    (a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System in den generalisierten Koordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$?

    (b) Prüfe durch Betrachtung von *Grenzfällen* die Plausibilität der hergeleiteten Differentialgleichungen.

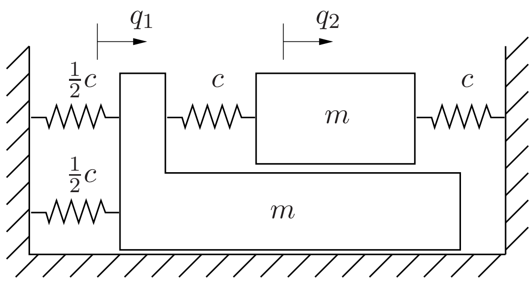


24. Das skizzierte System besteht aus einem Körper der Masse M, der sich auf seiner Unterlage reibungsfrei bewegen kann. Er wird von den beiden Federn (Steifigkeit c) festgehalten. Beide Federn seien in der eingezeichneten Lage entspannt.

    In einer Mulde rollt eine Kugel. Wenn der Grundkörper sich in der Mittelposition befindet ($x = 0$) und die Kugel im tiefsten Punkt der Mulde ist, gilt $\psi = 0$.

    Mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art sind die Bewegungsdifferentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten ψ und x aufzustellen.

    Geg.: m, M, Θ_s, c, R, r, g



25. Für eine überschlägige Dimensionierung einer Werkzeugmaschine sollen die Eigenfrequenzen des abgebildeten Ersatzsystems berechnet werden. Bei der Untersuchung des schwingungsfähigen Systems soll die Reibung vernachlässigt werden. Für $q_1 = q_2 = 0$ sind alle Federn entspannt.

    Geg.: m, c
    Gehen Sie wie folgt vor:

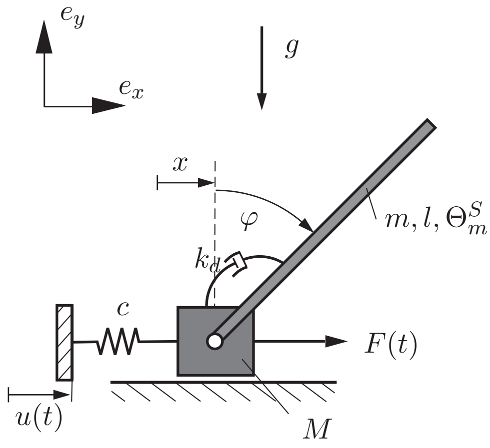
    (a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

    (b) Stellen Sie die kinetische Energie T und potentielle Energie U des Systems auf.

    (c) Bestimmen Sie nun die Lagrangefunktion L.

    (d) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichungen?

26. Das dargestellte System besteht aus einem dünnen, homogenen Stab (Länge l, Masse m, Massenträgheitsmoment Θ_S) und einem Klotz (Masse M), der reibungsfrei auf der Unterlage gleitet. Er wird bei seiner Bewegung entlang der Unterlage (Koordinate x) durch eine vorgegebene Kraft $F(t)$ in horizontaler Richtung angetrieben und ist andererseits mit einer immer horizontal gerichteten Feder verbunden. Deren linker Fußpunkt bewegt sich nach dem vorgeschriebenen Weg-Zeit-Gesetz $u(t)$ ebenfalls in horizontale Richtung. Für $x = u(t) = 0$ ist die Feder spannungslos. Zwischen Klotz und Stange wirkt ein winkelgeschwindigkeitsproportionaler Drehdämpfer mit der Dämpferkonstante k_d. Die Drehbewegung der Stange um den Gelenkpunkt S_K wird durch den von der Vertikalen gemessenen Drehwinkel φ beschrieben.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion L des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten x und φ auf.

(b) Stellen Sie die Dissipationsfunktion D des Systems auf.

(c) Geben Sie die generalisierten Nicht-Potentialkräfte Q_x und Q_φ an, die nicht durch D modellierbar sind.

(d) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Geg.: M, Θ_S, m, l, c, g, $F(t)$,k_d

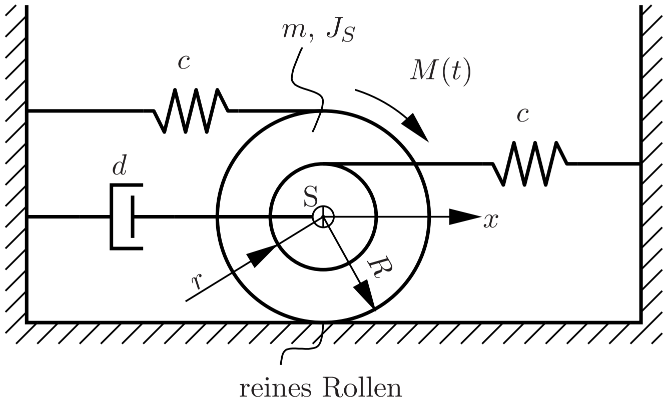
27. Das skizzierte System wird durch das Moment $M(t)$ zum Schwingen angeregt. In der eingezeichneten Position ($x = 0$) sind beide Federn gespannt. Die obere Feder ist um die Länge l_0 gespannt; die untere Feder ist so gespannt, daß $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist. Die Seile seien undehnbar. Es werden ausschließlich kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage betrachtet.

(a) Stellen Sie die kinetische Energie T und potentielle Energie U für das System auf.

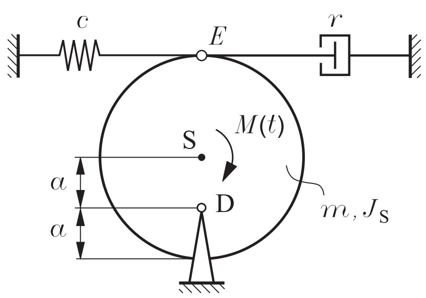
(b) Bestimmen Sie die Dissipationsfunktion D oder die generalisierte Kraft Q.

(c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung in der Schwerpunktskoordinate x. Um welche Länge muß die untere Feder gespannt sein, damit $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist?

(d) Bestimmen sie die Amplitude der stationären Schwingung!



Geg.: m, J_S, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$, M_0, Ω, c, d



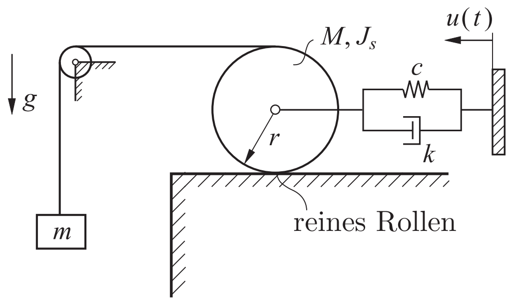
28. Das skizzierte System wird von einem im Massenmittelpunkt S angreifenden Moment angetrieben. Nach einer Einschwingphase stellt sich ein stationärer Zustand mit kleinen Ausschlägen ein. (Gravitation spielt keine Rolle.)

    (a) Bestimmen Sie die lineare Bewegungsdifferentialgleichung!

    (b) Wie groß ist die Kreisfrequenz der freien gedämpften Schwingung?

    (c) Bestimmen Sie die Amplitude und den Phasenwinkel der stationären Schwingung!

    Geg.: a, r, c, m, $J_S = 2ma^2$, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$

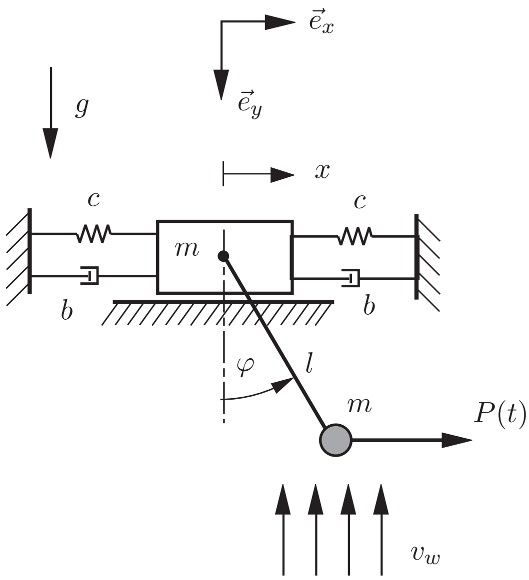


29. Das skizzierte System (homogene Kreisscheibe M, Θ_s, masselose Umlenkrolle, ideales Seil, Masse m, lineare Feder c, linearer Dämpfer k) erfährt eine Fußpunkterregung $u(t) = \hat{u} \cos \Omega t$.

    (a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

    (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Bewegung des Scheibenschwerpunktes mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art auf.

    Geg.: M, m, $\Theta_s = \frac{1}{2}Mr^2$, c, k, r, $\hat{u}$, Ω, g



30. Das skizierte System besteht aus einem starren Körper der Masse m, der auf einer Ebene reibungsfrei gleitet und mit zwei Federn und zwei Dämpfern an die Umgebung gebunden ist. Im Körperschwerpunkt ist ein mathematisches Pendel (Länge l, Masse m) angebracht, das von einem Wind der Geschwindigkeit $\vec{v}_w$ von unten angeblasen wird (Luftwiderstandsbeiwert k). Die Pendelmasse wird durch die Kraft $\vec{P}(t) = P_0 \cos \Omega t \vec{e}_x$ erregt. Die Bewegung verläuft im Erdschwerefeld.

    (a) Stellen Sie die Lagrangefunktion L des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten x und φ auf.

    (b) Berechnen Sie den Betrag der Relativgeschwindigkeit $|\vec{v}_{rel}|$ zwischen Pendelmasse und Wind.

    (c) Stellen Sie die Dissipationsfunktion D des Systems auf.

    (d) Geben Sie die generalisierten Nicht-Potentialkräfte Q_x und Q_φ an, die nicht durch D

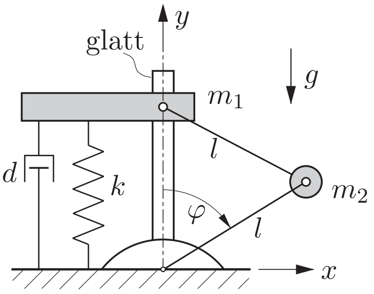
modellierbar sind.

(e) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Hinweis: $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_m - \vec{v}_w$; $\vec{v}_m$: Geschw. der Pendelmasse, $\vec{v}_w$ Windgeschwindigkeit

Geg.: m, b, c, k, l, g, v_w, P_0, Ω

31. Ein starrer Körper (Masse m_1) gleitet reibungsfrei in vertikaler Richtung und ist über eine masselose Stange (Länge l) mit einer Punktmasse m_2 gelenkig verbunden. Der starre Körper ist außerdem über ein lineares Feder-Dämpfer-Element (Federsteifigkeit k, Dämpferkonstante d) an den Boden gekoppelt. Die entspannte Länge der Feder sei $2l$. Die Punktmasse m_2 ist über eine weitere Stange (Länge l) gelenkig an den Boden gekoppelt.



(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

(b) Stellen Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die Dissipationsfunktion D als Funktion von φ und $\dot{\varphi}$ auf. Wie ist die Lagrangefunktion L definiert?

(c) Arbeiten Sie im folgenden mit der Lagrangefunktion

$$L = (2m_1 \sin^2\varphi + \frac{1}{2}m_2)l^2\dot{\varphi}^2 - (2m_1 + m_2)gl\cos\varphi - 2kl^2(1-\cos\varphi)^2$$

weiter. Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für das System.

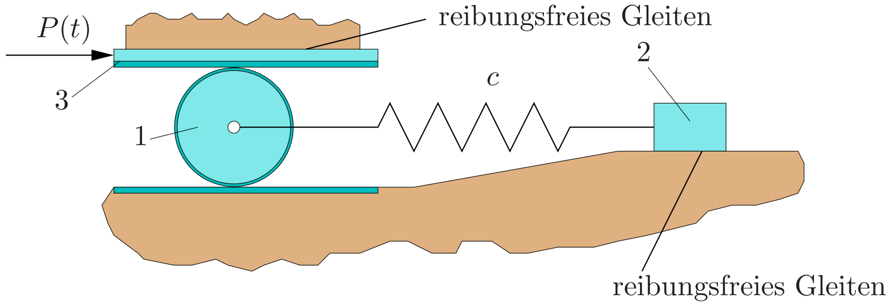
(d) Wie groß muß die Federsteifigkeit k sein, damit das System für $\varphi_S = \frac{\pi}{3}$ eine Gleichgewichtslage hat?

(e) Welche weiteren Gleichgewichtslagen sind im Bereich $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ vorhanden, wenn die Federsteifigkeit k den in Teil (d) bestimmten Wert hat?

Geg: k, d, m_1, m_2, l, g

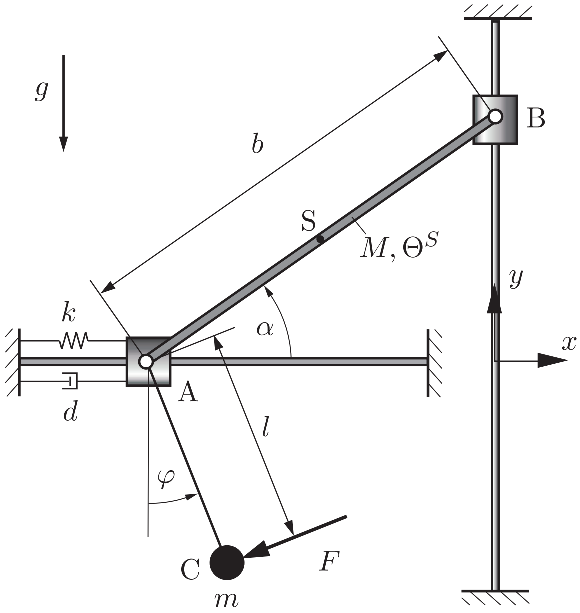
32. Das skizziere System besteht aus einem Zahnrad 1 (Masse m_1, Radius R), einer Zahnstange 3 und einem Gleitkörper 2 (Masse m_2). Die Masse der Zahnstange soll vernachlässigt werden. Zudem soll für eine erste Untersuchung des Schwingungsverhaltens auf eine Berücksichtigung der Reibung verzichtet werden.

Durch eine periodische Kraft $P(t)$ wird das System zu Schwingungen angeregt. Bestimme mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen die Bewegungsgleichungen des Systems!



Geg.: m_1, m_2, R, $P(t)$, c

33. Ein homogener Balken (Länge b, Masse M) ist in A und B gelenkig mit masselosen Schiebehülsen verbunden, die reibungsfrei auf den beiden Linearführungen gleiten können. Die Schiebehülse A ist durch ein Feder-Dämpfer-Element (Federsteifigkeit k, entspannte Lage bei $\alpha = \alpha_0$, lineare Dämpferkonstante d) an die Umgebung gekoppelt. Zusätzlich ist im Punkt A ein Punktmassependel (Länge l, Masse m) angebracht, an dessen Ende die nichtkonservative Kraft F wirkt. Der Betrag der Kraft F ist konstant, die Wirkungslinie ist stets senkrecht zu der Pendelstange.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion L des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten α und φ auf.

(b) Stellen Sie die Dissipationsfunktion D des Systems auf.

(c) Geben Sie die generalisierten Nicht-Potentialkräfte Q_α und Q_φ an, die nicht durch D modellierbar sind.

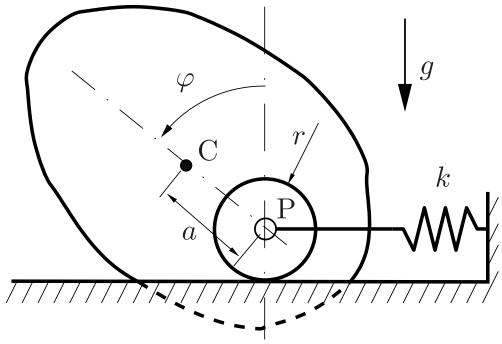
(d) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für das System ohne Pendel und Kraft F.
Hinweis: *Nutzen Sie dazu die bereits durchgeführten Rechnungen und setzen Sie* $m = 0$ *und* $F = 0$ *ein.*

Geg.: M, b, $\Theta^S = \frac{Mb^2}{12}$, m, l, d, k, g, F, α_0

34. Ein starrer Körper führt Schwingungen in einer vertikalen Ebene unter dem Einfluß der Schwerkraft aus. Der Zapfen (Radius r) rollt ohne zu gleiten auf der starren Unterlage. Der Zapfenmittelpunkt P wird über eine Feder mit der Steifigkeit k gehalten. Die Reibung des Systems sei vernachlässigbar bis auf ein Rollreibmoment M mit konstantem Betrag.

Die Lage des Systems ist bestimmt durch den Drehwinkel φ. Bei $\varphi = 0$ sei die Feder entspannt und der Massenmittelpunkt C stehe genau senkrecht über dem Zapfenmittelpunkt P.

Der Massenmittelpunkt C des Gesamtsystems hat den Abstand a vom Zapfenmittelpunkt P. Der Körper hat die Masse m und das Massenträgheitsmoment J^{C} um den Massenmittelpunkt.



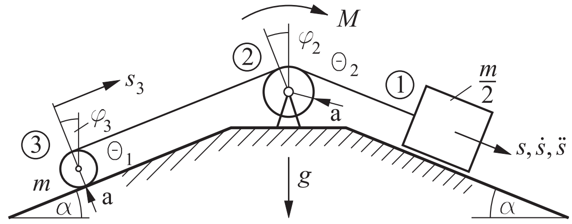
(a) Bestimmen Sie die LAGRANGE-Gleichung(en) 2. Art (Bewegungsdifferentialgleichung/en) des Systems.

(b) Leiten Sie nun für den Fall des glatten Rollkontaktes ($M = 0$) aus den/der Bewegungsdifferentialgleichung(en) eine Bestimmungsgleichung für die statische(n) Ruhelage(n) her.

Geg.: a, r, g, k, M, m, J^{C}

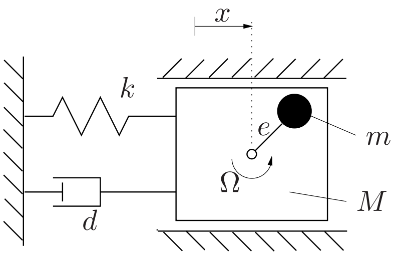
Literatur: [3, S. 177-187]

35. Ermittle für das skizzierte System die Beschleunigung der Masse **1**, die reibungsfrei auf der schiefen Ebene gleitet. Die Rolle **2** wird durch ein konstantes Moment M angetrieben, und die Walze **3** rollt ohne zu gleiten.



Geg.: M, m, a, α, Θ_1, Θ_2, g

36. Ein starrer Körper (Masse M) gleitet reibungsfrei in einer Führung und ist über ein Feder-Dämpfer-Element (Konstanten k, d) an die Umgebung gekoppelt. Außerdem trägt der starre Körper eine mit der Winkelgeschwindigkeit Ω rotierende masselose Stange, die im Abstand e vom Drehpunkt eine Punktmasse m trägt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Stange horizontal und die Punktmasse rechts vom Drehpunkt. Für $x = 0$ sei die Feder entspannt.



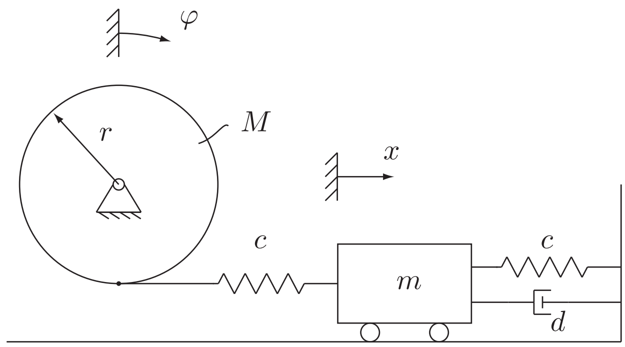
(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System, wenn die Winkelgeschwindigkeit Ω vorgegeben ist?

(b) Wie lautet die Bewegungsdifferentialgleichung für das System?

(c) Bestimme die Lösung im eingeschwungenen Zustand.

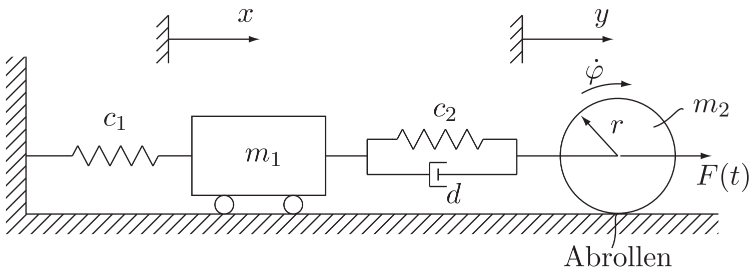
(d) Wie groß sind die Kräfte im Feder-Dämpfer-Element im eingeschwungenen Zustand?

37. Das skizzierte schwingungsfähige System besteht aus der reibungsfrei drehbar gelagerten homogenen Scheibe (Masse M, Radius r) und dem reibungsfrei horizontal beweglichen Körper (Masse m). Scheibe und Körper sind untereinander über eine Dehnfeder (Steifigkeit c) und der Körper über Dehnfeder und Dämpfer (Konstanten c, d) mit der Umgebung gekoppelt. Die Federn seien für $\varphi, x = 0$ entspannt. Leiten Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die linearisierten Bewegungsgleichungen für kleine x und φ her.



Geg.: m, M, r, c, d

38. Gegeben ist das skizzierte schwingungsfähige System mit 2 Freiheitsgraden bestehend aus einem Körper der Masse m_1 der sich reibungsfrei in horizontaler Richtung bewegen kann, sowie einer homogenen Scheibe (Masse m_2, Radius r), die auf der Unterlage abrollt. Scheibe und Körper sind in der skizzierten Weise untereinander und mit der Umgebung durch Feder und Dämpfer gekoppelt. Die Federn seien für $x = y = 0$ entspannt. Das System wird durch die Kraft $F(t)$ angeregt.

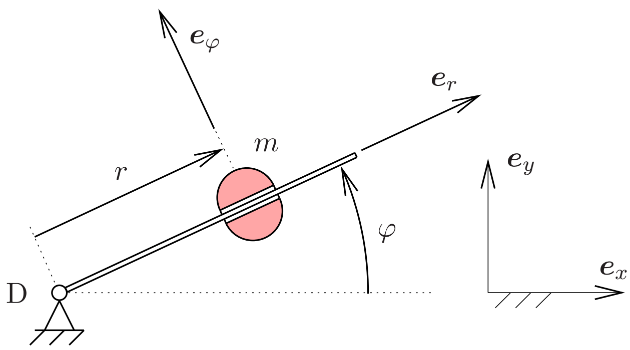


(a) Geben Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U an.

(b) Leiten Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen in x und y her.

Geg.: m_1, m_2, r, c_1, c_2, d, $F(t)$

39. Auf einer unendlich langen starren masselosen Stange gleitet reibungsfrei die Punktmasse m. Die Drehung der Stange ist vorgegeben als $\varphi(t) = \omega t$ (Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit). Bestimmen Sie die Kraft der Stange auf die Masse. Benutzen Sie r und φ als generalisierte Koordinaten. Und gehen Sie wie folgt vor:



(a) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ mit Ursprung D. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = v_r \boldsymbol{e}_r + v_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$ und $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$.

(b) Bestimmen Sie die kinetische Energie E und damit die Lagrange-Funktion $L(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$.

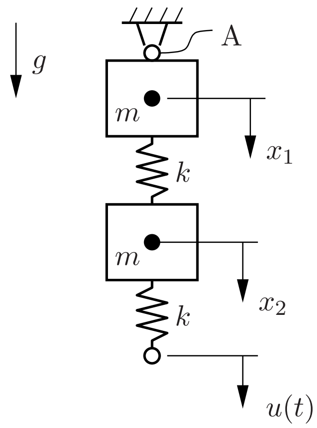
(c) Geben Sie die (holonome, rheonome) Zwangsbedingung in der Form $f(\varphi, t) = 0$ an. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial r}$ sowie $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

(d) Stellen Sie die Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0$ auf. Setzen Sie darin die Zwangsbedingung ein. Und geben Sie die beiden resultierenden Dgln. für r und λ an.

(e) Geben Sie die generalisierten Zwangskräfte Q_r und Q_φ an. Berechnen Sie daraus die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$ in der Basis $\langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi \rangle$, also $\boldsymbol{Z} = Z_r \boldsymbol{e}_r + Z_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$. Kontrollieren Sie die Dimension von $\boldsymbol{Z}$.

Geg.: m, ω =const.

40. Der skizzierte Vertikalschwinger, der sich unter dem Einfluß des Erdschwerefeldes g befindet, wird durch eine vorgegebene Verschiebung $u(t) = \hat{u} \sin \Omega t$ erregt.



(a) Formuliere für die Koordinatenwahl $q^1 := x_1, q^2 := x_2$ die Zwangsbedingung, und gib die zugehörigen Zwangskräfte an! (Die hochgestellten Zahlen sind hier hochgestellte Indizes, keine Exponenten.)

Welche Bedeutung hat der Zwangskraftparameter λ in diesem Fall? Begründung!

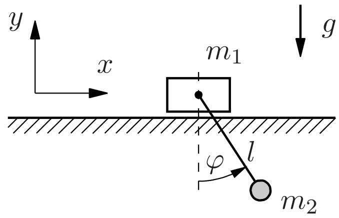
(b) Stelle die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf!

(c) Bestimme durch Auswertung der Zwangsbedingung aus den Lagrange-Gleichungen 1. Art die vertikale Lagerkraft bei A und die Bewegugsgleichung des Systems!

Geg.: m, g, k, $u(t) = \hat{u} \sin \Omega t$

Hinweis: Betrachte ausschließlich die Bewegung in Vertikalrichtung!

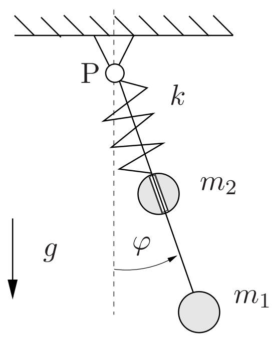
41. Zwischen der Masse m_1 und der horizontalen Ebene besteht Gleitreibung. Der Betrag der Gleitreibungskraft wird über die Zwangskraft des Pendelfadens von der Schwingung der Masse m_2 beeinflußt.



Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 1.Art sowohl die Normalkraft zwischen m_1 und der Ebene als auch die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems (Die Zwangskraft des Pendelfadens ist nicht gesucht!).

Geg.: m_1, m_2, l, g, μ

42. Eine masselose starre Stange ist am Punkt P aufgehängt. Im Abstand $r_1 = l$ ist eine Punktmasse m_1 befestigt. Auf der Stange gleitet außerdem eine zweite Punktmasse m_2 reibungslos. Der Abstand der zweiten Punktmasse vom Aufhängungspunkt P sei mit r_2 bezeichnet. Die Feder hat die Federsteifigkeit k und die unverformte Länge l_0.



Gesucht sind die Bewegungsdifferentialgleichungen und die Längskraft in der Stange.

(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

(b) Welche generalisierten Koordinaten sind zu wählen? Wie lauten die Zwangsbedingungen?

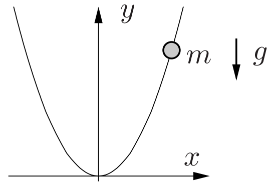
(c) Formuliere die kinetische und potentielle Energie in den gewählten Koordinaten.

(d) Wie lauten die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art?

(e) Leite nun die Bewegungsdifferentialgleichungen und die Kraft in der Stange her.

(f) Wie lauten die Gleichgewichtslagen? Welche Lagerkraft wirkt dann im Lager P?

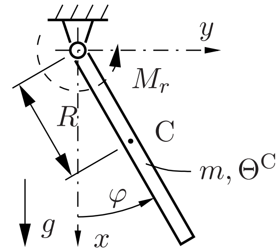
43. Auf einem ruhenden, parabelförmig gebogenen Draht rutscht eine Perle mit Reibung. Die Schwerkraft wirkt in negative y-Richtung.



Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung auf und berechnen Sie die Zwangskraft mit Hilfe der Lagrangegleichungen 1.Art.

Geg.: m, g, $y(x) = ax^2$, $a = const.$, μ

44. Bei dem skizzierten Pendel tritt am Gelenk ein linear viskoses Reibmoment der Größe $M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$ auf (r_φ: Drehviskosität).



Stelle für folgende Koordinatensysteme die LAGRANGE-Gleichungen 1. Art auf, werte diese aus, bestimme die Zwangskraftparameter, werte diese aus und führe eine vergleichende Diskussion durch.

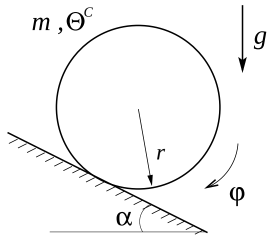
(a) kartesische Koordinaten (x, y) des Massenmittelpunktes C und Drehwinkel φ

(b) ebene Polarkoordinaten (r, φ) des Massenmittelpunktes C

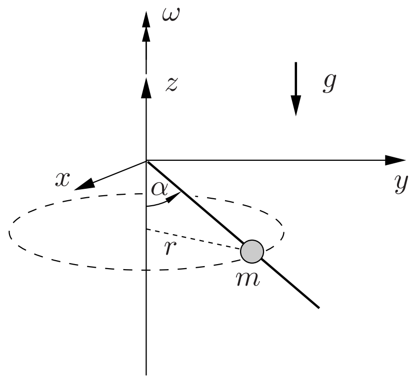
Geg.: m, Θ^C, R, g, $M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$

Literatur: [4], [6]

45. Mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 1. Art berechne man alle Kontaktkräfte und die Bewegungsgleichung des skizzierten Systems.



46. An einer vertikalen Achse, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist unter dem Winkel α ein gerader Draht befestigt, auf dem eine Perle der Masse m reibungsfrei gleitet.



(a) Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1.Art für die Zylinderkoordinaten r, φ, z auf.

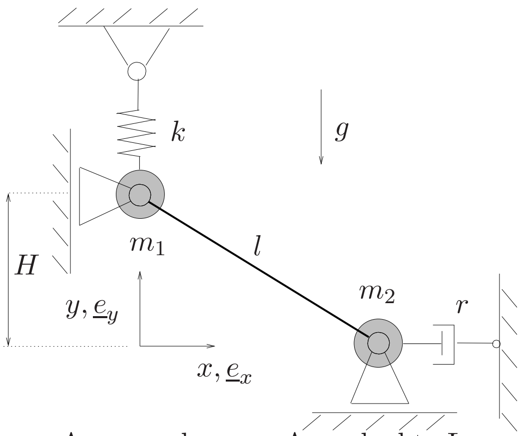
(b) Lösen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für $z(t)$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

(c) Ermitteln Sie die Zwangskräfte in Abhängigkeit der Zeit.

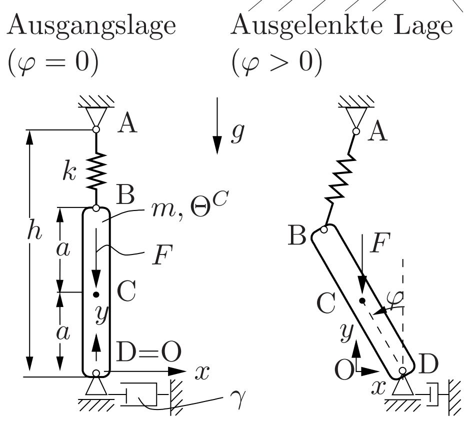
(d) Berechnen Sie die Energie der Perle und zeigen Sie, daß der Energiegewinn durch rheonome Zwangsarbeit verursacht wird.

Geg.: m, g, α, ω

47. Zwei Massen m_1 und m_2 sind mit einer masselosen Stange gelenkig verbunden. Die Masse m_1 kann sich nur in y–Richtung, und die Masse m_2 kann sich nur in x–Richtung bewegen. Mit den Lagrangeschen Gleichungen 1. Art berechne man die Stangenkraft. Die Feder ist bei $y = H$ spannungslos.



48. Ein starrer Körper (Massenmittelpunkt C) hat die Masse m und das Massenträgheitsmoment bezüglich des Massenmittelpunktes Θ^C. Er ist wie abgebildet am unteren Ende über ein Loslager an die Umgebung gekoppelt und am oberen Ende über eine vorgespannte Feder. Die Feder hat die Federsteifigkeit k und die entspannte Länge 0. Im Punkt C greift zusätzlich eine äußere Einzelkraft an. Das Loslager verursacht viskose Reibung (Dämpfungskoeffizient γ).



Es soll die ebene Bewegung des Pendels im Schwerefeld der Erde mit Hilfe der LAGRANGE-Gleichungen 1. Art untersucht werden. Dazu werden als generalisierte Koordinaten die kartesischen Koordinaten $u := x_B, v := y_B$ des Punktes B am Körper und der Drehwinkel φ benutzt.

Gegeben: g, a, h, m, Θ^C, k, F, γ

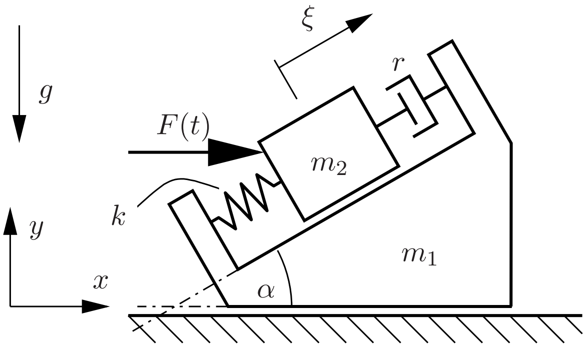
(a) Wieviele Koordinatenfreiheitsgrade hat das System? Wieviele LAGRANGE-Gleichungen werden mit dem oben angegebenen Koordinatensatz entstehen? Wievielen Zwangsbedingungen müssen diese Koordinaten genügen.

(b) Stellen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Systems als Funktionen der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten auf.

(c) Stellen Sie die Zwangsbedingungen und die Leistung der Restkräfte auf.

(d) Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art zunächst in allgemeiner Form und anschließend speziell für dieses System hin.

49. Ein viereckiger Klotz bewegt sich ohne abzuheben auf einem dreieckigen Prisma im Erdschwerefeld. Zwischen beiden besteht außerdem eine linear elastische und eine linear viskose Wechselwirkung. Am Schwerpunkt des Klotzes greift eine horizontale zeitlich veränderliche Kraft $F(t)$ an. Zwischen Prisma und Unterlage sei die Reibung zu vernachlässigen.



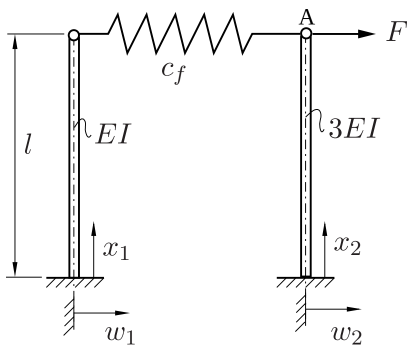
Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen für folgende Koordinaten auf: x und y sind die kartesischen Koordinaten des Prismas, ξ ist die relative Verschiebung des Klotzes gegen das Prisma, bei $\xi = 0$ sei die Feder entspannt.

Geben Sie den Satz von Differential- und algebraischen Gleichungen an, mit denen sich die Bewegung und die Zwangskraftparameter bestimmen lassen.

Geg.: k, r, α, m_1, m_2, $F(t)$, g

3 Verfahren von Ritz

50. Für das aus zwei Stäben und einer linearen Feder bestehende System ist näherungsweise die Horizontalverschiebung des Punktes A zu bestimmen, wenn an diesem wie skizziert mit der Kraft F gezogen wird. Zur Lösung dieser Aufgabe sind folgende Teilschritte zu bearbeiten:



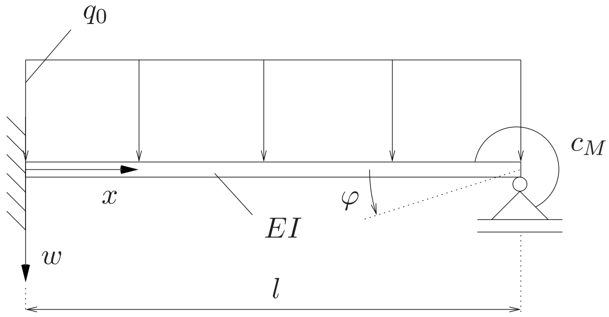
(a) Für die Biegelinie beider Bereiche ist jeweils ein Polynom 3.Grades als Ansatzfunktion zu wählen. Passen Sie diese Ansatzpolynome den geometrischen Randbedingungen an; fordern Sie zudem, daß die das Moment betreffenden Randbedingungen erfüllt sind.

(b) Stellen Sie das Energiefunktional $\Pi = A - W$ auf.

(c) Berechnen Sie durch Extremalisierung dieses Funktionals ($\delta\Pi = 0$) die noch unbestimmten Koeffizienten und geben Sie die Näherungslösung für die Horizontalverschiebung im Punkte A an.

Gegeben: l, EI, $c_f = \frac{2EI}{l^3}$, F

51. Dargestellt ist ein Balken unter der Last q_0. Am rechten Ende ist eine Drehfeder (Federsteifigkeit c_M) angebracht. Bestimmen Sie eine Näherungslösung für die Durchsenkung $w(x)$. Verwenden Sie den Ansatz $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Gehen Sie wie folgt vor:

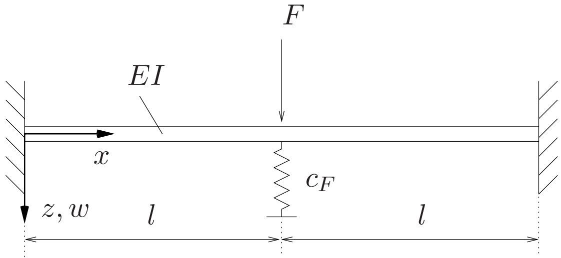


   (a) Passen Sie den Ansatz an die 3 geometrischen Randbedingungen an. Eliminieren Sie a_0, a_1 und a_2, und geben Sie die angepasste Ansatzfunktion an.

   (b) Berechnen Sie die Formänderungsenergie W und die äußere Arbeit A. Die Formänderungsenergie einer Drehfeder berechnet sich aus $W_F = \frac{1}{2} c_M \varphi^2$.
   Hinweis: Es gilt $\varphi(x = l) = w'(x = l)$.

   (c) Berechnen Sie den Freiwert a_3 aus der Bedingung $\delta(W - A) = 0$, und geben Sie damit die Näherungslösung an.

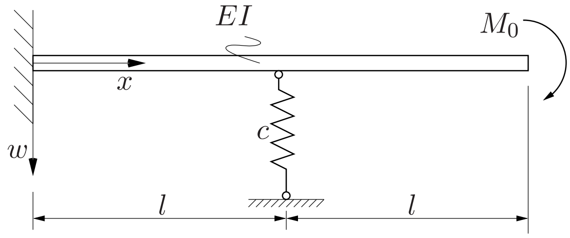
52. Bestimmen Sie für die nebenstehend skizzierten Balken mit Hilfe des Ritz'schen Verfahrens eine Näherungslösung für die Biegelinie $w(x)$! Passen Sie zunächst die Ansatzfunktion den geometrischen Randbedingungen an!



   Ansatz:
   $w(x) = a_0 + a_1 \cos(\frac{\pi x}{l}) + a_2 \sin(\frac{\pi x}{l})$

   Gegeben:
   l, I, E, c_F, F

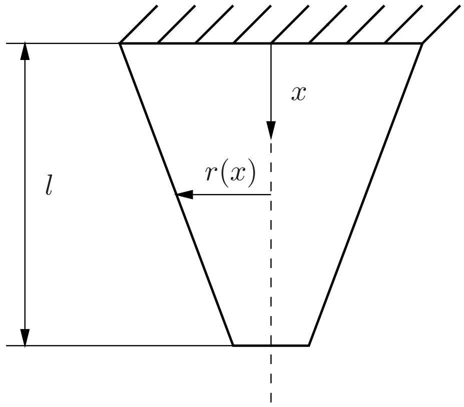
53. Mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens berechne man die Durchsenkung des skizzierten Balkens an der Stelle $x = 2l$. Als Ritzansatz soll folgende Funktion verwendet werden:



   $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \cosh(\frac{x}{l})$

   Gegeben: M_0, EI, c, l

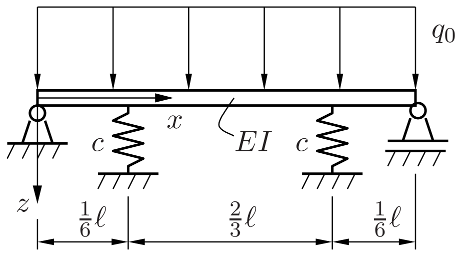
54. Im folgenden soll die Längsverschiebung eines einseitig eingespannten Stabes mit linear veränderlichem Querschnittsradius r im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g) untersucht werden. Es seien linear-elastisches Material, ein eindimensionaler Spannungszustand, über die Stablänge l konstante Dichte ρ und E-Modul E vorausgesetzt. Für die Radien $r_0 = r(x = 0)$ und $r_1 = r(x = l)$ gelte die Beziehung $r_1 = \frac{2}{3}r_0$. Zudem gilt $r \ll l$.



(a) Wählen Sie eine Ansatzfunktion, die den geometrischen Randbedingungen genügt. Berechnen Sie nun näherungsweise die Absenkung des freien Endes.

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Ergebnis.

55. Ermitteln Sie für das skizzierte System die Durchbiegung an der Stelle $x = \ell/2$! Verwenden Sie dazu den folgenden Ansatz, nachdem Sie ihn an die geometrischen Randbedingungen angepaßt haben.

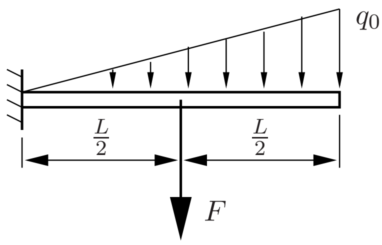


Ansatz: $\tilde{w}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Geg.: EI, c, q_o, ℓ

Literatur: [1] S. 384ff, Abschnitt 7.5.6 (zum besseren Verständnis auch Abschnitt 7.2, S. 347ff und Abschnitt 7.5.1, S. 373f): Ritz-Verfahren im Hinblick auf numerische Berechnung,
[2] S. 719, Abschnitt 9.6.1 Prinzipien der Elastostatik Teil A Prinzip der virtuellen Verschiebungen: Verfahren nach Ritz und Verfahren nach Galerkin führen auf dieselben Gleichungen,
[5] Kap. 13 §8 S. 439 Die Ritz-Methode, S. 441 Die Galerkin-Methode

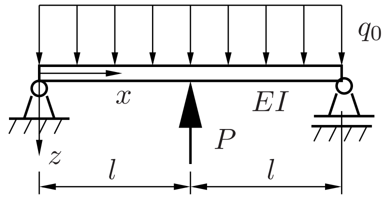
56. Ein Kragbalken der Länge L mit konstanter Biegesteifigkeit EI ist mit einer wie skizziert linear verteilten Streckenlast und einer in der Mitte angreifenden Einzellast F belastet.



Bestimme die Verschiebung des freien Balkenendes mit dem Näherungsverfahren nach Ritz.

Die Biegelinie nach Theorie erster Ordnung soll mit einem Polynom dritten Grades approximiert werden, das die geometrischen Randbedingungen erfüllt.

Geg.: EI, L, F, Maximum der Streckenlast: q_0



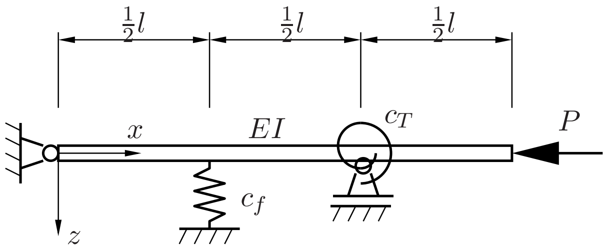
57. Bestimmen Sie eine Näherung für die Biegelinie $w(x)$. Verwenden und diskutieren Sie den Ritz-Ansatz

$$\tilde{w}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

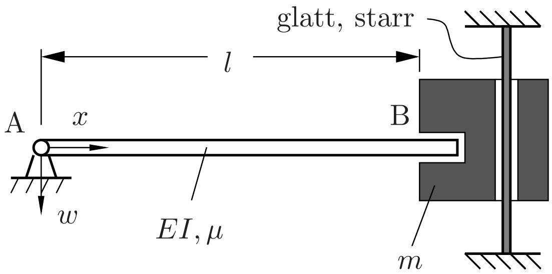
Vergleichen Sie das Ergebnis mit der analytischen Lösung.
Geg.: EI, P, q_0, l

58. Berechnen Sie mit einem eingliedrigen Polynomansatz die kritische Knicklast für das dargestellte System.

Geg.: l, c_T, c_f, EI



59. Ein massebehafteter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Massebelegung μ) ist bei A gelenkig gelagert und bei B in eine Hülse gesteckt, die dem Balken dort eine horizontale Tangente aufzwingt. Die Hülse (Masse m) kann auf einer starren Stange in vertikaler Richtung reibungsfrei gleiten. Der Balken schwingt ausschließlich in Querrichtung.

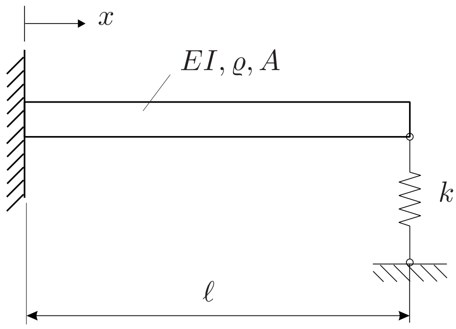


   (a) Wählen Sie eine Ansatzfunktion (z.B. eine harmonische Funktion), die den geometrischen Randbedingungen genügt.
   (b) Bestimmen Sie nun die bezogene kinetische und maximale potentielle Energie des Systems.
   (c) Berechnen Sie schließlich eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1?

Geg.: EI, l, m, μ

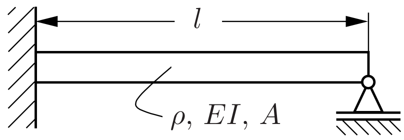
Hinweis: $\int \sin^2 ax \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin 2ax$

60. Für den skizzierten Balken mit federnder Lagerung ermittle man mit Hilfe des Energiequotienten die erste Eigenkreisfrequenz der Tranversalschwingung.
Man verwende den Polynomansatz niedrigster Ordnung, der alle Randbedingungen bis zur zweiten Ableitung der Biegelinie erfüllt.



Geg.: EI, ϱ, A, k, ℓ

61. Für den skizzierten einseitig fest eingespannten und am anderen Ende gelenkig gelagerten Balken ermittle man nach Ritz die erste Eigenkreisfrequenz und vergleiche sie mit dem exakten Wert:



$$\omega_{1,\,\mathrm{exakt}} = 15,42\ \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

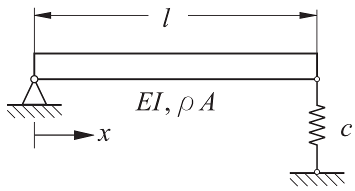
Warum ist die Näherungslösung zu groß?

Ansatzfunktion:

$$w(x,t) = x^2(l-x)^2 q(t)$$

Geg.: ρ, A, EI, l

62. Berechnen Sie die beiden ersten Eigenkreisfrequenzen des skizzierten Balkens näherungsweise mit einem zweigliedrigen Ansatz nach Ritz:



$$w(x,t) = \varphi_1(x)q_1(t) + \varphi_2(x)q_2(t)\ .$$

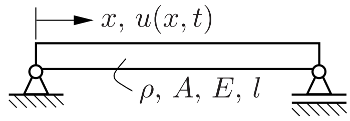
Verwenden Sie die Ansatzfunktionen

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{l}\ ; \quad \varphi_2(x) = \sin\frac{\pi x}{l} \quad .$$

Geg.: l, EI, c, ρA, $c = \pi^4 \frac{EI}{2l^3}$, EI =const.

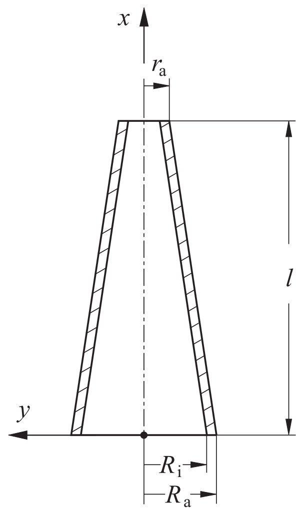
63. Der dargestellte Stab führt infolge einer einmaligen Anregung Longitudinalschwingungen aus. Ermitteln Sie mit dem Verfahren von Rayleigh-Ritz eine Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz unter Verwendung der folgenden Ansatzfunktion:

$$u(x,t) = x^2(3l-2x)q(t)$$



Geg.: ρ, A, E, l

64. Der skizzierte Betonschornstein konstanter Wandstärke führt Biegeschwingungen aus.



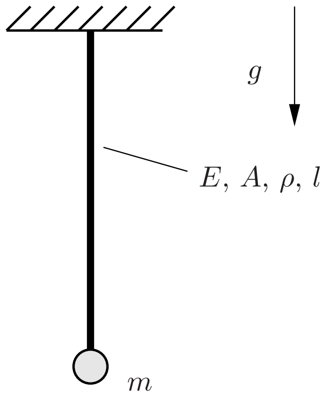
(a) Überprüfe die angegebene Funktion $\varphi(x)$ auf ihre Brauchbarkeit als Ansatz für eine näherungsweise Bestimmung der ersten Eigenkreisfrequenz (nach Ritz).

(b) Bestimme näherungsweise die niedrigste Eigenfrequenz des Systems!

$$\varphi(x) = l^4\left[6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$$

Geg.: l, E, ρ, r_a, $R_a = 2r_a$, $R_a - R_i = \frac{1}{2}r_a$

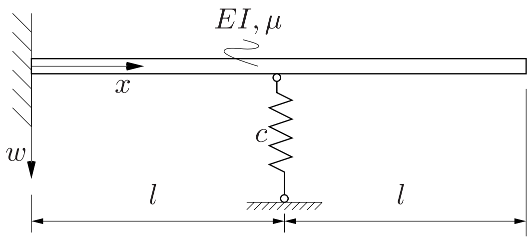
65. Das abgebildete System besteht aus einem elastischen, massebehafteten Stab (Dichte ρ, Länge l, Querschnittsfläche A, E-Modul E) und einer Endmasse m.



Mit Hilfe eines eingliedrigen Ansatzes nach Ritz soll näherungsweise die erste Eigenkreisfrequenz berechnet werden, wobei die Längsverschiebung der Punktmasse den Freiheitsgrad $q(t)$ beinhaltet. Als Formfunktion ist ein linearer Ansatz zu wählen.

Geg.: l, E, A, ρ, m, g,

66. Bestimmen Sie näherungsweise die erste Eigenfrequenz des gegebenen Systems.
Passen Sie zunächst die Ansatzfunktion den geometrischen Randbedingungen an!

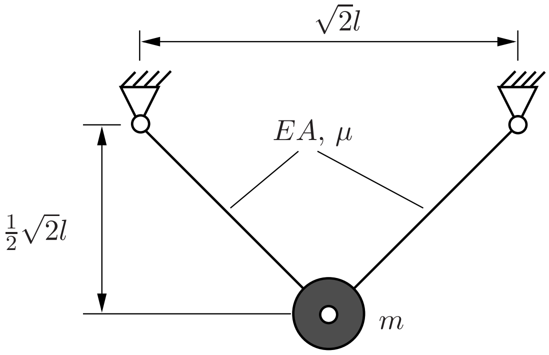


Ansatz:
$W_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \cosh(\frac{x}{l})$

Geg.: EI, c, l, μ

Hinweis: $\int \cosh^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sinh 2ax$

67. Betrachtet wird ein Stabwerk aus zwei identischen Stäben (Länge l, Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ). Am oberen Ende sind die Stäbe gelenkig an die Umgebung angebunden. Am unteren Ende sind beide Stäbe gelenkig mit einer Punktmasse m verbunden. Betrachtet werden ausschließlich kleine Vertikalbewegungen der Punktmasse. Vereinfachend sei angenommen, daß beide Stäbe stets gleich schwingen.



Im folgenden soll mit verschiedenen Verfahren die niedrigste Eigenkreisfrequenz bzw. eine Näherung für die niedrigste Eigenkreisfrequenz des Systems bestimmt werden.

(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das abgebildete System?

(b) Wie lauten die geometrischen Randbedingungen?

(c) Leite die Bewegungsdifferentialgleichungen und die dynamischen Randbedingungen für das untersuchte System her.

(d) Wie lautet die Frequenzgleichung des untersuchten Systems? Bestimme nun für $\mu = \frac{m}{10l}$ die niedrigste Eigenkreisfrequenz des Systems.
Hinweis: Die kleinste positive Lösung der Gleichung $10\chi \tan \chi = 1$ ist $\chi_1 \approx 0,3111$.

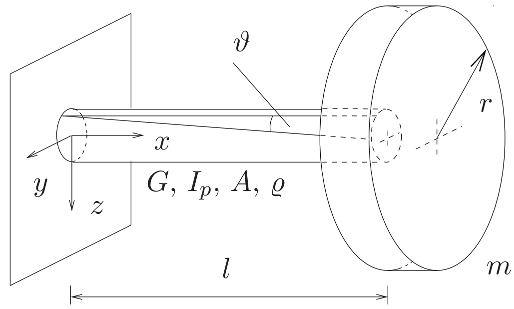
(e) Welche Eigenkreisfrequenz erhält man für $\mu = \frac{m}{10l}$, wenn man einen linearen Ritz-Ansatz für die Längsverschiebung der Stäbe wählt?

(f) Vernachlässigt man die Stabmasse gegenüber der Punktmasse, erhält man einen Einmassenschwinger. Bestimme die zugehörige Eigenkreisfrequenz mit dem zweiten Satz von Castigliano. Vergleiche die drei Ergebnisse miteinander.

68. Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse m. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Stab um seine Längsachse schwingen.

    Bestimmen Sie näherungsweise die erste Eigenkreisfrequenz.

    Geg.: l, r, m, G, I_p, A, ϱ

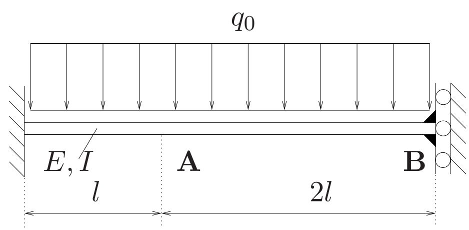


4 Sätze von Castigliano

69. Gegeben ist die nebenstehend skizzierte Konstruktion.

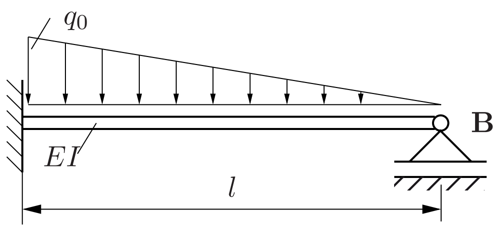
    Berechnen Sie unter Verwendung des ersten Satzes von Castigliano die Durchsenkung an der Stelle **A**.

    Gegeben: l, q_0, E, I, der Balken sei schubstarr



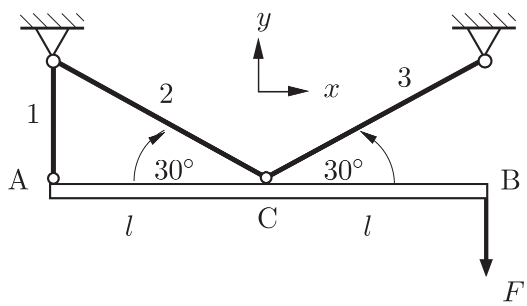
70. Für den skizzierten schubstarren Träger mit der konstanten Biegesteifigkeit EI ist mittels des ersten Satzes von Castigliano die Lagerkraft an der Stelle **B** zu bestimmen.

    Gegeben seien die Größen: l, EI, q_0



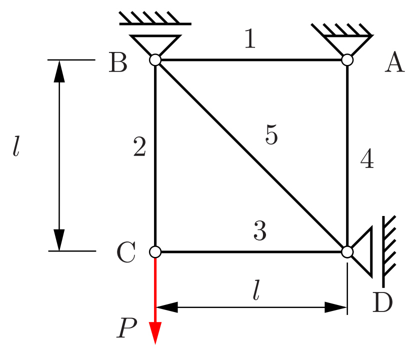
71. Ein Balken (Länge $2l$, Biegesteifigkeit EI) ist mit drei Stäben (Dehnsteifigkeit EA) statisch bestimmt gestützt. Berechnen Sie mit Hilfe des **Satzes von CASTIGLIANO** die Verschiebung des Punktes B in Richtung der Kraft F.

    Geg.: l, EI, EA

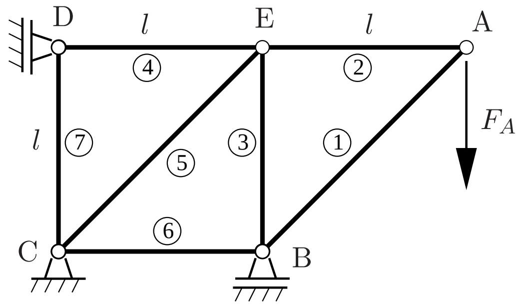


72. Alle Stäbe des Fachwerks haben die gleiche Querschnittsfläche A und den gleichen E-Modul E. Berechne die vertikale Verschiebung des Lasteinleitungspunktes C unter der Einwirkung der äußeren Last P.

    Geg.: P, l, E, A



73. Das abgebildete Fachwerk aus 7 Stäben mit der Dehnsteifigkeit EA ist innerlich statisch bestimmt. Aufgrund der Lagerung in den Punkten B, C, D ist das Fachwerk äußerlich einfach statisch überbestimmt.



Die (komplementäre) Formänderungsenergie eines longitudinal gedehnten Stabes beträgt:

$$U_{\text{Stab}} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{N^2}{EA}dx$$

(a) Machen Sie die Lagerung des Fachwerks statisch bestimmt, indem Sie das Lager bei B entfernen und dort die Lagerkraft F_B einführen. Bestimmen Sie dann die Kräfte in den Stäben, z.B. indem Sie die Knoten A, B und E freischneiden.

(b) Berechnen Sie nun die (komplementäre) Formänderungsenergie U des Fachwerkes als Funktion der Kräfte F_A und F_B.

(c) Nutzen Sie im folgenden die (komplementäre) Formänderungsenergie

$$U = \frac{l}{EA}\left[aF_A^2 + bF_AF_B + cF_B^2\right] \ ,$$

mit den bekannten Konstanten a, b und c. Berechnen Sie die Lagerkraft F_B.

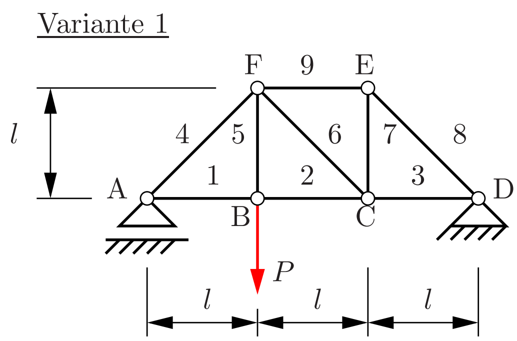
(d) Wie groß ist die statische Durchsenkung in vertikaler Richtung u_A am Punkt A?

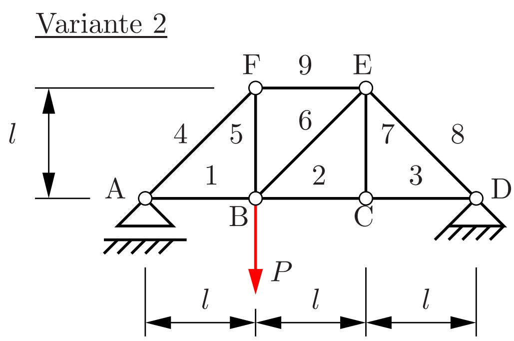
(e) An der Stelle A sei nun statt der Kraft F_A eine Punktmasse m angebracht. Die Masse der Stäbe soll gegenüber dieser Punktmasse vernachlässigt werden.

Betrachtet werden ausschließlich vertikale Schwingungen der Punktmasse m. Das Fachwerk verhält sich dann wie eine lineare Feder. Wie groß ist die Ersatzfedersteifigkeit? Welche Eigenkreisfrequenz hat das System?

Geg.: F_A, l, EA, m

74. Ein Fachwerk aus 9 Stäben ist in A und B gelagert. Im Punkt B wirkt eine vertikale Kraft P. Die Stäbe haben alle die gleiche Querschnittsfläche A und den gleichen E-Modul E.

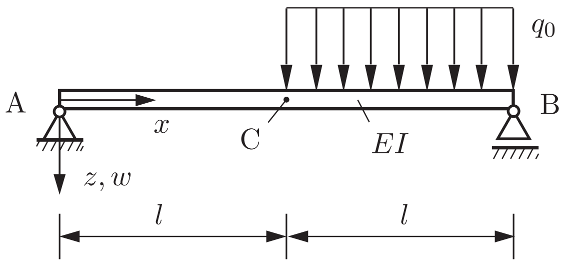




Es werden zwei verschiedene Varianten vorgeschlagen (siehe Bild). Welche Variante ist zu wählen, wenn die vertikale Durchsenkung in B möglichst klein sein soll? Begründen Sie Ihre Entscheidung durch geeignete Berechnungen. Wie groß ist die Durchsenkung im besseren Fall?

Geg.: P, l, E, A

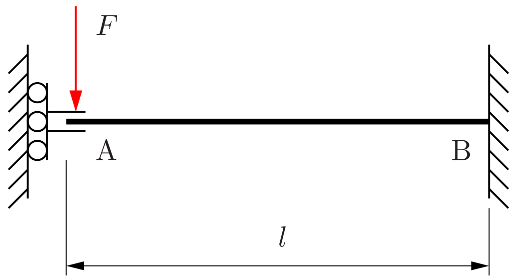
75. Berechnen Sie für den skizzierten schubstarren Balken(Länge $2l$, Biegesteifigkeit EI) unter Verwendung des **Satzes von Castigliano** die Durchsenkung an der Stelle C ($x = l$).



Geg.: q_0, EI, l

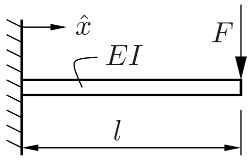
76. Ein schubstarrer Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI) ist links mittels einer Hülse gelagert und rechts fest eingespannt. Berechnen Sie das (betragsmäßig) maximale Biegemoment im Balken und geben Sie an, wo dieses Biegemoment auftritt.

Geg.: F, EI, l

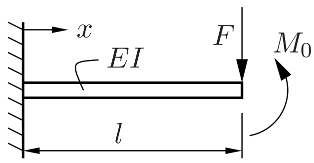


77. Berechne mit Hilfe des Satzes von Castigliano die Biegelinie $w(\hat{x})$ des skizzierten Kragarms mit der Biegesteifigkeit EI unter Einwirkung der Einzellast F am freien Ende.

Geg.: F, l, EI



78. Am Ende des skizzierten schubstarren Balkens mit der Biegesteifigkeit K_B greifen ein Moment M_0 und eine Einzellast F an.



(a) Berechne die das elastische Potential U_{el} des Systems. Bestimme nun mit dem ersten Satz von CASTIGLIANO die Durchsenkung $w_1(l)$ und den Biegewinkel $\varphi_1(l)$ am rechten Ende des Balkens ($x = l$).

(b) Berechne den Biegewinkel $\varphi_2(l)$ am rechten Balkenende für den Fall $M_0 = 0$.

Geg.: M_0, F, EI, l

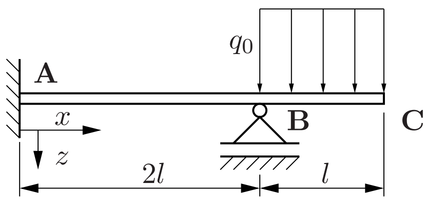
79. Der skizzierte dehn- und schubstarre Träger mit der konstanten Biegesteifigkeit EI ist einfach statisch unbestimmt.

(a) Machen Sie das System statisch bestimmt, indem Sie das Lager an der Stelle **B** durch eine noch zu bestimmende Kraft ersetzen.

(b) Unterteilen Sie den Balken in zwei Bereiche, und ermitteln Sie den Momentenverlauf analytisch.

(c) Ermitteln Sie die Ableitung der Formänderungsenergie, und bestimmen Sie die eingeführte unbekannte Kraft.

(d) Geben Sie alle Lagerkräfte bzw. -momente an.

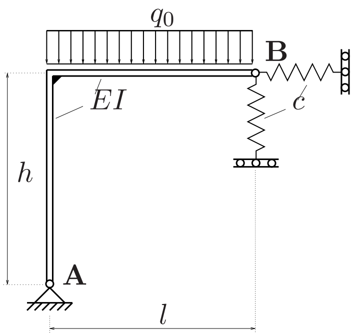


Gegeben seien die Größen: l, E, I, q_0

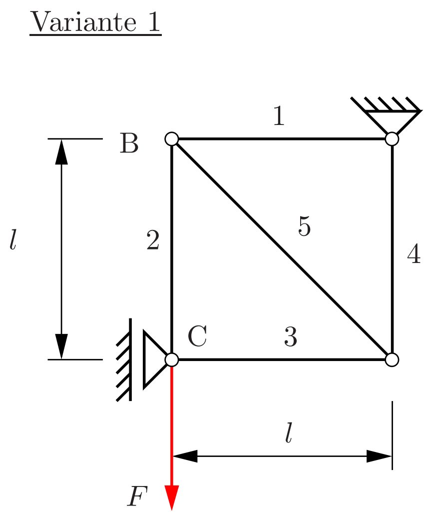
80. Ein rechtwinkliger, einhüftiger Tragrahmen wird wie skizziert durch die Streckenlast $q(x)$ belastet. Der Rahmen wird als schubstarr angesehen.

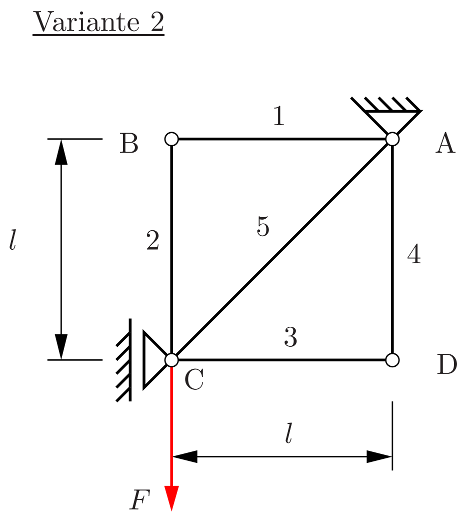
Berechnen Sie mit den Sätzen von CASTIGLIANO die Lagerreaktionen an den Orten **A** und **B**.

Gegeben seien die Größen: h, l, E, I, c, q_0



81. Ein Fachwerk aus 5 Stäben ist in A und C gelagert. Im Punkt C wirkt eine vertikale Kraft F. Die Stäbe haben alle die gleiche Querschnittsfläche A und den gleichen E-Modul E.





Es werden zwei verschiedene Varianten vorgeschlagen (siehe Bild).

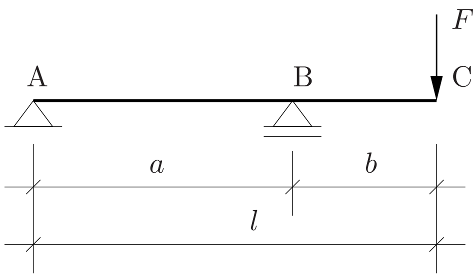
(a) Welche Variante ist zu wählen, wenn die vertikale Durchsenkung in C möglichst klein sein soll? Begründen Sie Ihre Entscheidung durch geeignete Berechnungen. Wie groß ist die Durchsenkung im besseren Fall?

(b) Welche Gesichtspunkte könnten bei der Auswahl außerdem eine Rolle spielen.

Geg.: P, l, E, A

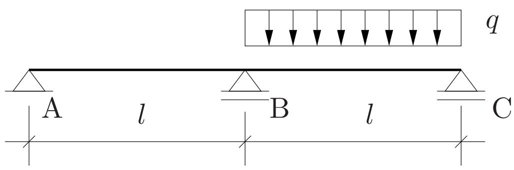
82. Berechnen Sie die vertikale Verschiebung bei C und die Verdrehung in B mit dem ersten Satz von Castigliano.

Geg.: F, a, b, EI



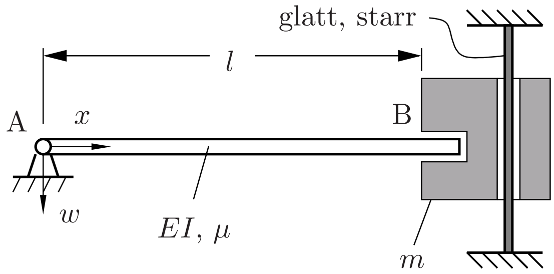
83. Berechnen Sie die Auflagerreaktionen mit dem ersten Satz von Castigliano.

Geg.: q, l, EI



5 Prinzip der kleinsten Wirkung

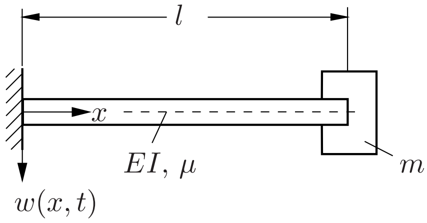
84. Ein Balken (Länge l, Massebelegung μ, Biegesteifigkeit EI) ist bei A gelenkig gelagert und bei B in eine Hülse gesteckt, die dem Balken dort eine horizontale Tangente aufzwingt. Die Hülse (Masse m) kann auf einer starren Stange in vertikaler Richtung reibungsfrei gleiten. Der Balken schwingt ausschließlich in Querrichtung.



Leite die Bewegungsdifferentialgleichungen und die dynamischen Randbedingungen mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung her.

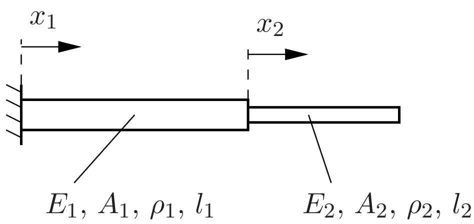
Geg.: EI, μ, l, m

85. Ein bei $x = 0$ eingespannter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit $EI =$ konst., Massenverteilung $\mu =$ konst.) mit der Endmasse m an der Stelle $x = l$ soll Eigenschwingungen durchführen. Mit Hilfe des Hamilton Prinzips sind die dynamischen Randbedingungen und die Bewegungsdifferentialgleichung zu ermitteln.



Geg.: EI, l, μ, m.
Hinweis: Die Formänderungsenergie des Biegebalkens beträgt $U_{\text{Balken}} = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} EIw''(x)^2 dx$.

86. Zwei Stäbe (Längen l_1, l_2 Querschnittsflächen A_1, A_2, E-Moduln E_1, E_2 und Dichten ρ_1, ρ_2) sind wie skizziert miteinander verbunden und links fest eingespannt. Das System schwingt ausschließlich in Längsrichtung.



Benutze zur Formulierung der Bewegungsdifferentialgleichungen und Randbedingungen die eingezeichneten raumfesten Koordinaten x_1 und x_2.

(a) Wie lauten die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen für das dargestellte System?

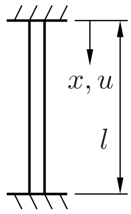
(b) Formuliere die kinetische und potentielle Energie für das Gesamtsystem.

(c) Leite nun die Bewegungsdifferentialgleichungen und die dynamischen Randbedingungen mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung her!

(d) Mit welchem Ansatz kann man die Eigenfrequenzen des Systems bestimmen? Wieviele Eigenfrequenzen hat das System?

Geg.: E_1, E_2, A_1, A_2, ρ_1, ρ_2, l_1, l_2

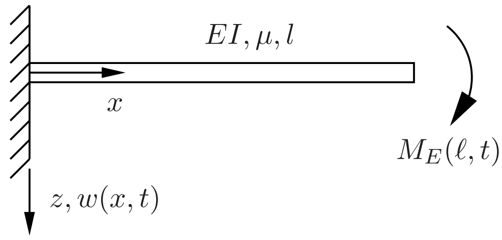
87. Gegeben ist der skizzierte homogene Dehnstab.



   (a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?
   (b) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem.
   (c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.
   (d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

   Geg.: μ, A, E, l

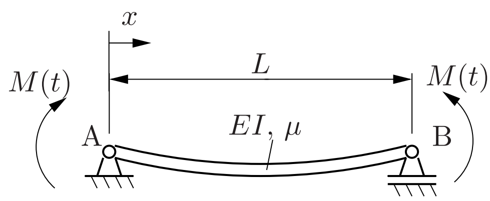
88. Ein Kragbalken wird wie abgebildet durch ein Moment am rechten Rand belastet.



   (a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?
   (b) Berechnen Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW für das Gesamtsystem.
   (c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.
   (d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

   Geg.: $EI, \mu, l, M_E = M(t)$

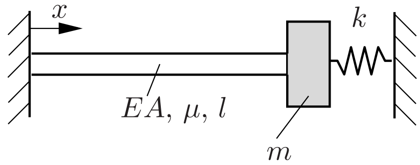
89. Ein elastischer, massebehafteter Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge L, Querschnittsfläche A und Dichte ρ) ist links und rechts gelenkig gelagert. An beiden Enden greift ein periodisches Moment $M(t) = M_0 \cos \Omega t$ an.



   (a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?
   (b) Berechnen Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW für das Gesamtsystem.
   (c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.
   (d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

   Geg.: M_0, Ω, L, EI, A, μ

90. Ein massebehafteter elastischer Stab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) ist am linken Rand ($x = 0$) fest eingespannt und trägt am rechten Rand ($x = l$) eine Punktmasse m. Die Punktmasse ist außerdem über eine Feder (Steifigkeit k) an die Umgebung gekoppelt.



Die Feder sei entspannt, wenn der Stab unverformt ist. Es werden ausschließlich Längsschwingungen $u\,(x,t)$ betrachtet.

(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

(b) Wie berechnen sich die kinetische Energie E und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem?

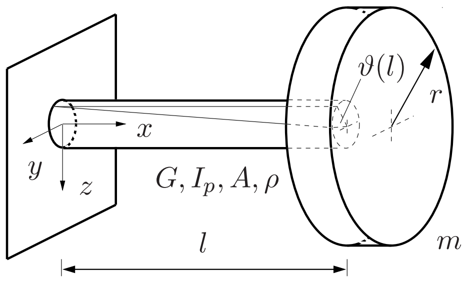
(c) Formulieren Sie das Prinzip der kleinsten Wirkung für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

(e) Mit welchem Ansatz für die Verschiebungen $u\,(x,t)$ kann man die Bewegungsdifferentialgleichung lösen und die Eigenfrequenzen des Systems ermitteln? Wieviele Eigenfrequenzen hat das System?

Geg.: m, k, l, $EA =$ konst., $\mu =$ konst.,
Hinweis: Formänderungsenergie eines Dehnstabes: $U_{el} = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} EAu'^2 dx$.

91. Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse.



(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

(b) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

Geg.: l, m, G, I_p, A, ρ, r